МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ «ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ» (ДГТУ)

ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА
(теория, практика и контрольное задание №1 для студентов ДГТУ)

Ростов-на-Дону
2023

Линейная алгебра (теория, практика и контрольное задание №1 для студентов ДГТУ) – Ростов-на-Дону: Донск. гос. технич. ун-т, 2023,– 30 с.

Изложен курс лекций по линейной алгебре. Приводится большое число примеров с решениями, а также заданий для самостоятельной работы. Содержит варианты контрольных заданий и образцы выполнения упражнений.

Методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения.

Составители: к.ф.-м.н. Богачева М.Н.
к.ф.-м.н. Гробер О.В.
к.ф.-м.н. Гробер Т.А.

ЧАСТЬ 1. ЛИНЕЙНАЯ АЛГЕБРА

1.1. Матрицы и определители

1.1.1. Основные понятия

Матрицей размера $m \times n$ называется прямоугольная таблица чисел, содержащая m строк и n столбцов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Каждый элемент матрицы a_{ik} имеет два индекса: i – номер строки и k – номер столбца. Например, в матрице

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -7 & 4 & 3 \\ 2 & 0 & 8 & 1 \\ -3 & -4 & 9 & 6 \end{pmatrix}$$

размера 3×4, $a_{11} = 5$, $a_{23} = 8$, $a_{34} = 6$.

Часто используется краткая запись матрицы: $A = (a_{ik})_{m,n}$. Матрица называется **квадратной** n-го порядка, если она состоит из n строк и n столбцов. Матрица размера $1 \times n$ называется **матрицей-столбцом**, а матрица размера $m \times 1$ **матрицей-столбцом**.

Нулевой матрицей 0 заданного размера называется матрица, все элементы которой равны 0.

Единичной называется квадратная матрица, элементы главной диагонали которой равны 1, а все остальные элементы равны 0:

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

Можно говорить о единичных матрицах любого порядка.

Транспонированной для матрицы A называется матрица A^T, строки которой являются столбцами матрицы A, а столбцы – строками A. Например, если

$$A = \begin{pmatrix} 5 & -9 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \text{ то } A^T = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ -9 & 2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы $A = (a_{ik})_{m,n}$ и $B = (b_{ik})_{m,n}$ называются **равными**, если $a_{ik} = b_{ik}$, $i = 1, \ldots, m$, $k = 1, \ldots, n$.

1.1.2. Линейные операции над матрицами

Суммой матриц $A=(a_{ik})_{m,n}$ и $B=(b_{ik})_{m,n}$ называется матрица $A+B=(a_{ik}+b_{ik})_{m,n}$.

Другими словами, для сложения матриц надо сложить элементы матриц, стоящие на одних и тех же местах. Складываются матрицы только одинакового размера.

Произведением матрицы $A=(a_{ik})_{m,n}$ на число λ называется матрица $\lambda A=(\lambda a_{ik})_{m,n}$.

Другими словами, для умножения матрицы на число надо каждый элемент матрицы умножить на это число. Любую матрицу можно умножить на любое число.

Для любых матриц одинакового размера и любых чисел λ и μ выполняются свойства:

1) $A+B=B+A$;
2) $A+0=A$;
3) $A+(B+C)=(A+B)+C$;
4) $\lambda(\mu A)=(\lambda\mu)A$;
5) $\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$;
6) $(\lambda+\mu)A=\lambda A+\mu A$.

Пример 1. Даны матрицы $A=\begin{pmatrix}2&1\\3&0\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}-1&4\\5&2\end{pmatrix}$. Найти матрицу $C=2A-3B+A^T$.

<u>Решение</u>.

$$C=2A-3B+A^T=\begin{pmatrix}4&2\\6&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-3&13\\15&6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&3\\1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&-7\\-8&-6\end{pmatrix}.\blacksquare$$

1.1.3. Умножение матриц

Матрицы умножаются по правилу «строка на столбец». Расшифруем, что имеется в виду.

Произведением матрицы $A=(a_{ik})_{m,p}$ на матрицу $B=(b_{ik})_{p,n}$ называется матрица C размера $m\times n$ с элементами $c_{ik}=\sum_{j=1}^{p}a_{ij}\cdot b_{jk}$, $i=1,2,\ldots,m$, $k=1,2,\ldots,n$.

Другими словами, для получения элемента, стоящего в i-той строке матрицы-произведения на k-том месте, следует вычислить сумму произведений элементов i-той строки матрицы $A=(a_{ik})_{m,p}$ на k-тый столбец матрицы $B=(b_{ik})_{p,n}$.

В самом определении произведения матриц заложено, что число столбцов первой матрицы должно совпадать с числом строк второй. Это **условие согласования** матриц при умножении. Если оно нарушено, то матрицы перемножить нельзя.

Пример 2. Найти произведение матриц $A=\begin{pmatrix}2&4\\1&3\end{pmatrix}$ и $B=\begin{pmatrix}5&-1&2\\2&0&6\end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> $A\cdot B=\begin{pmatrix}2\cdot5+4\cdot2 & 2\cdot(-1)+4\cdot0 & 2\cdot2+4\cdot6\\1\cdot5+3\cdot2 & 1\cdot(-1)+3\cdot0 & 1\cdot2+3\cdot6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}18&-2&28\\11&-1&20\end{pmatrix}.\blacksquare$

Заметим, что вполне возможна ситуация, когда $A\cdot B$ существует, а $B\cdot A$ нет. Именно так происходит в примере 2. Кроме того, когда существуют оба произведения, то чаще всего они не равны, т.е., вообще говоря, $A\cdot B\neq B\cdot A$. Приведем еще ряд свойств операции умножения матриц. Если A, B и C - квадратные матрицы одного порядка, то справедливы равенства:

1) $A\cdot(B\cdot C)=(A\cdot B)\cdot C$; 3) $(A+B)\cdot C=A\cdot C+B\cdot C$;

2) $A\cdot(B+C)=A\cdot B+A\cdot C$; 4) $A\cdot E=E\cdot A=A$.

1.1.4.Определители

Понятие определителя вводится только для квадратных матриц. Рассмотрим квадратную матрицу $2^{\underline{\text{го}}}$ порядка: $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$.

Определителем $2^{\underline{\text{го}}}$ порядка матрицы A называется число:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}.$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} -11 & 4 \\ 5 & 12 \end{pmatrix}$.

Решение. $\Delta(A)=-11\cdot 12-4\cdot 5=-152.$ ■

Пусть $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ – матрица $3^{\underline{\text{го}}}$ порядка.

Минором элемента a_{ik} называется определитель M_{ik}, составленный из элементов, оставшихся после вычеркивания из матрицы i-той строки и k-того столбца.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ik} называется число

$$A_{ik}=(-1)^{i+k}M_{ik}.$$

Определителем $3^{\underline{\text{го}}}$ порядка (матрицы A) называется сумма произведений элементов первой строки матрицы на их алгебраические дополнения.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13}.$$

Пример 3. Вычислить определитель матрицы $A=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{pmatrix}$.

<u>Решение.</u> Находим миноры и алгебраические дополнения элементов 1-ой строки матрицы:

$$M_{11}=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}=7, \qquad A_{11}=(-1)^{1+1}M_{11}=+M_{11}=7;$$

$$M_{12}=\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}=35, \qquad A_{12}=(-1)^{1+2}M_{12}=-M_{12}=-35;$$

$$M_{13}=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-7, \qquad A_{13}=(-1)^{1+3}M_{13}=+M_{13}=-7.$$

Вычисляем исходный определитель

$$\Delta(A)=3\cdot 7+(-2)\cdot(-35)+4\cdot(-7)=63$$

В дальнейшем при вычислении определителей мы будем пользоваться более короткой записью:

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 7 \end{vmatrix}=3\cdot\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 7 \end{vmatrix}-(-2)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 2 & 7 \end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=63. \blacksquare$$

Далее индуктивно вводится понятие определителей более высоких порядков.

Определителем n-го порядка называется сумма произведений элементов 1-ой строки на их алгебраические дополнения.

Свойства определителей

1. Определитель не меняется при транспонировании.
2. Если все элементы какой-либо строки (или столбца) равны нулю, то определитель равен 0.
3. Если две строки (два столбца) поменять местами, то определитель меняет знак.
4. Если элементы какой-либо строки (столбца) содержат общий множитель, то его можно вынести за знак определителя.
5. Если в определителе две строки (два столбца) одинаковы или пропорциональны, то определитель равен 0.
6. Справедливо равенство

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

7. Определитель не изменится, если к элементам какой-либо его строки (столбца) прибавить элементы другой строки (столбца), умноженные на одно и то же число.

8. Сумма произведений элементов **любой** строки (столбца) на свои алгебраические дополнения равна самому определителю.
9. Сумма произведений элементов **любой** строки (столбца) определителя на алгебраические дополнения другой строки (столбца) равна 0.

Теорема 1. *Если A и B – квадратные матрицы n-го порядка, то*

$$\Delta(A\cdot B)=\Delta(A)\cdot\Delta(B).$$

Следствие. $\Delta(A\cdot B)=\Delta(B\cdot A)$.

Пример 5. *(Образец решения задачи 2 из контрольной работы). Даны матрицы* $A=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\4&0&2\end{pmatrix}$ *и* $B=\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&3&-2\\5&1&1\end{pmatrix}$. *Проверить справедливость равенства* $\Delta(A\cdot B)=\Delta(B\cdot A)=\Delta(A)\cdot\Delta(B)$.

Решение.

$$\Delta(A)=\begin{vmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\4&0&2\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}2&3\\0&2\end{vmatrix}-1\cdot\begin{vmatrix}-1&3\\4&2\end{vmatrix}+0\cdot\begin{vmatrix}-1&2\\4&0\end{vmatrix}=8+14+0=22$$

$$\Delta(B)=\begin{vmatrix}-1&4&2\\0&3&-2\\5&1&1\end{vmatrix}=-1\cdot\begin{vmatrix}3&-2\\1&1\end{vmatrix}-4\cdot\begin{vmatrix}0&-2\\5&1\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}0&3\\5&1\end{vmatrix}=-5-40-30=-75$$

$$A\cdot B=\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\4&0&2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&3&-2\\5&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&11&2\\16&5&-3\\6&18&10\end{pmatrix}$$

$$\Delta(A\cdot B)=\begin{vmatrix}-2&11&2\\16&5&-3\\6&18&10\end{vmatrix}=-2\cdot\begin{vmatrix}5&-3\\18&10\end{vmatrix}-11\cdot\begin{vmatrix}16&-3\\6&10\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}16&5\\6&18\end{vmatrix}=-208-1985+516=$$

$$=-1650$$

$$B\cdot A=\begin{pmatrix}-1&4&2\\0&3&-2\\5&1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2&1&0\\-1&2&3\\4&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&7&16\\-11&6&5\\13&7&5\end{pmatrix}$$

$$\Delta(B\cdot A)=\begin{vmatrix}2&7&16\\-11&6&5\\13&7&5\end{vmatrix}=2\cdot\begin{vmatrix}6&5\\7&5\end{vmatrix}-7\cdot\begin{vmatrix}-11&5\\13&5\end{vmatrix}+2\cdot\begin{vmatrix}-11&6\\13&7\end{vmatrix}=-10+840-2480=$$

$$=-1650$$

Таким образом,

$$\Delta(A\cdot B)=\Delta(B\cdot A)=\Delta(A)\cdot\Delta(B)=-1650.\ \blacksquare$$

1.1.5. Обратные матрицы

Матрица A^{-1} называется обратной к квадратной матрице A, если

$$A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=E.$$

Матрица A называется **вырожденной**, если $\Delta(A)=0$; в противном случае A – **невырожденная** матрица.

Для того, чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была невырожденной, т.е. $\Delta(A)\neq 0$.

В таком случае,

$$A^{-1}=\frac{1}{\Delta(A)}\cdot\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix},$$

т.е. обратная матрица есть разделенная на $\Delta(A)$ транспонированная матрица алгебраических дополнений элементов матрицы A.

Пример 6. *Дана матрица* $A=\begin{pmatrix} 5 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -2 & 4 & 7\end{pmatrix}$. *Найти* A^{-1}.

Решение.

$$A_{11}=+\begin{vmatrix} -1 & 3\\ 4 & 7\end{vmatrix}=-19\quad A_{21}=-\begin{vmatrix} 1 & -1\\ 4 & 7\end{vmatrix}=-11\quad A_{31}=+\begin{vmatrix} 1 & -1\\ -1 & 3\end{vmatrix}=2$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix} 2 & 3\\ -2 & 7\end{vmatrix}=-20\quad A_{22}=+\begin{vmatrix} 5 & -1\\ -2 & 7\end{vmatrix}=33\quad A_{32}=-\begin{vmatrix} 5 & -1\\ 2 & 3\end{vmatrix}=-17$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix} 2 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}=6\quad A_{23}=-\begin{vmatrix} 5 & 1\\ -2 & 4\end{vmatrix}=-22\quad A_{33}=+\begin{vmatrix} 5 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}=-7$$

$$\Delta(A)=5\cdot(-19)+1\cdot(-20)+(-1)\cdot 6=-121$$

и тогда, $A^{-1}=\dfrac{1}{-121}\cdot\begin{pmatrix} -19 & -11 & 2\\ -20 & 33 & -17\\ 6 & -22 & -7\end{pmatrix}$.

Проверка

$$A\cdot A^{-1}=-\frac{1}{121}\cdot\begin{pmatrix}5 & 1 & -1\\ 2 & -1 & 3\\ -2 & 4 & 7\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-19 & -11 & 2\\ -20 & 33 & -17\\ 6 & -22 & -7\end{pmatrix}=$$

$$-\frac{1}{121}\begin{pmatrix}-121 & 0 & 0\\ 0 & -121 & 0\\ 0 & 0 & -121\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=E.$$

Аналогично убеждаемся, что $A^{-1}\cdot A=E$. Значит, матрица A^{-1} найдена верно. ■
Справедлива следующая теорема

Теорема 2. *Если A и B невырожденные квадратные матрицы одинакового порядка, то*

$$(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}.$$

1.2. Системы линейных алгебраических уравнений

Рассмотрим систему из 3-х алгебраических уравнений с 3-мя неизвестными:

$$\begin{cases}a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=b_2\\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=b_3\end{cases}\qquad(1.1)$$

1.2.1. Метод Крамера

Теорема 3. *Если определитель матицы системы (1.1)*

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

отличен от нуля ($\Delta\neq 0$), то система имеет единственное решение, определяемое формулами Крамера:

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta},\ \ y=\frac{\Delta_y}{\Delta},\ \ z=\frac{\Delta_z}{\Delta}.$$

1.2.2. Матричный метод

Обозначим через A матрицу системы (1.1), т.е. матрицу, составленную из коэффициентов при неизвестных:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix},$$

через $X=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ – матрицу-столбец из неизвестных и через $B=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{pmatrix}$ – матрицу-столбец правых частей.

Принимая во внимание правило умножения матриц, можно систему линейных уравнений (1.1) записать в виде матричного уравнения:

$$A\cdot X=B,$$

решение которого имеет вид

$$X=A^{-1}\cdot B.$$

Пример 7. (Образец выполнения задачи 1 из контрольной работы) Решить систему уравнений двумя способами:

$$\begin{cases}3x+y-2z=1\\2x-2y+z=11\\5x+3y-3z=-2\end{cases}.$$

<u>Решение.</u> Используем метод Крамера:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&1&-2\\2&-2&1\\5&3&-3\end{vmatrix}=-12,\quad \Delta_x=\begin{vmatrix}1&1&-2\\11&-2&1\\-2&3&-3\end{vmatrix}=-24,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix}3&1&-2\\2&11&1\\5&-2&-3\end{vmatrix}=36,\quad \Delta_z=\begin{vmatrix}3&1&1\\2&-2&11\\5&3&-2\end{vmatrix}=-12.$$

Тогда

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{-24}{-12}=2,\;\; y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{36}{-12}=-3,\;\; z=\frac{\Delta_z}{\Delta}=\frac{-12}{-12}=1.$$

Проверим правильность полученных решений, для чего подставим их в условие:

$$\begin{cases}3\cdot2-3-2\cdot1=1\\2\cdot2-2\cdot(-3)+1=11\\5\cdot2+3\cdot(-3)-3\cdot1=-2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}6-3-2=1\;\;\textit{верно}\\4+6+1=11\;\;\textit{верно}\\10-9-3=-2\;\;\textit{верно.}\end{cases}$$

Теперь решим ту же систему матричным методом. Найдем обратную матрицу A^{-1} к матрице системы $A=\begin{pmatrix}3&1&-2\\2&-2&1\\5&3&-3\end{pmatrix}$. Вычислим все алгебраические дополнения:

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}-2 & 1\\ 3 & -3\end{vmatrix}=3;\quad A_{21}=-\begin{vmatrix}1 & -2\\ 3 & -3\end{vmatrix}=-3;\quad A_{31}=+\begin{vmatrix}1 & -2\\ -2 & 1\end{vmatrix}=-3;$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}2 & 1\\ 5 & -3\end{vmatrix}=11;\quad A_{22}=+\begin{vmatrix}3 & -2\\ 5 & -3\end{vmatrix}=1;\quad A_{32}=-\begin{vmatrix}3 & -2\\ 2 & 1\end{vmatrix}=-7;$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}2 & -2\\ 5 & 3\end{vmatrix}=16;\quad A_{23}=-\begin{vmatrix}3 & 1\\ 5 & 3\end{vmatrix}=-4;\quad A_{33}=+\begin{vmatrix}3 & 1\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-8.$$

Следовательно, $A^{-1}=\dfrac{1}{-12}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ 11 & 1 & -7\\ 16 & -4 & -8\end{pmatrix}$. Тогда

$$X=A^{-1}\cdot B=\frac{1}{-12}\cdot\begin{pmatrix}3 & -3 & -3\\ 11 & 1 & -7\\ 16 & -4 & -8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ 11\\ -2\end{pmatrix}=\frac{1}{-12}\cdot\begin{pmatrix}-24\\ 36\\ -12\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 1\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x=2,\quad y=-3,\quad z=1.$■

Замечание 1. Метод Крамера и матричный метод применимы для систем любого конечного порядка при условиях, что количество уравнений должно совпадать с количеством неизвестных и определитель системы отличен от нуля.

Замечание 2. Если определитель системы равен нулю, то система либо не имеет решений вообще, либо имеет бесконечное множество решений.

1.2.3. Метод Гаусса

Как было отмечено выше, метод Крамера и матричный метод имеют один существенный недостаток: они неприменимы, если определитель системы равен нулю. В связи с этим, рассмотрим еще один, наиболее универсальный метод решения систем линейных алгебраических уравнений – метод Гаусса.

Пусть число уравнений системы совпадает с числом неизвестных[1].

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1\\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+\cdots+a_{2n}x_n=b_2\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ a_{n1}x_1+a_{n2}x_2+\cdots+a_{nn}x_n=b_n\end{cases}\qquad(1.2)$$

Расширенной матрицей системы (1.2) называется матрица системы, дополненная столбцом свободных членов:

[1] Это требование необязательно для метода Гаусса

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) \qquad (1.3)$$

Расширенная матрица системы называется верхнетреугольной, если в матрице системы все элементы ниже главной диагонали равны нулю:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a'_{nn} & b'_n \end{array}\right) \qquad (1.4)$$

Расширенная матрица системы называется диагональной, если матрица системы представляет собой единичную:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & b''_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & b''_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & b''_n \end{array}\right) \qquad (1.5)$$

К элементарным преобразованиям расширенной матрицы системы относятся преобразования трех типов:

1) Перемена местами любых двух строк:

$$C_i \leftrightarrow C_j, \quad i \neq j\,.$$

2) Умножение любой строки на любое число, отличное от нуля

$$\alpha C_i, \quad \alpha \in R, \alpha \neq 0\,.$$

3) Прибавление к любой строке любой другой, умноженной на произвольное число:

$$C_i + \alpha C_j, \quad i \neq j, \quad \alpha \neq 0\,.$$

Известно, что элементарные преобразования расширенной матрицы системы приводят к эквивалентной матрице, т.е. система линейных алгебраических уравнений, соответствующая полученной матрице, имеет те же решения, что и исходная.

Идея метода Гаусса заключается в том, чтобы с помощью элементарных преобразований от расширенной матрицы системы вида (1.3) перейти вначале к верхнетреугольной матрице (1.4) (прямой ход метода Гаусса), а затем и к диагональной (1.5) (обратный ход метода Гаусса).

Если при переходе к верхнетреугольной матрице в матрице системы не возникло ни одной нулевой строки (это соответствует тому, что определитель исходной системы отличен от нуля), то система имеет единственное решение. Его легко найти, исходя из диагонального вида: $x_1 = b_1''$, $x_2 = b_2'', \cdots, x_n = b_n''$.

Продемонстрируем на примерах технику использования элементарных преобразований.

Пример 8. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 2x - y + 3z = 8 \\ 3x + 2y + z = 5 \\ x - 3y + 5z = 10 \end{cases}$.

Решение. Запишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 3 & 5 & 10 \end{array}\right).$$

Выберем в первом столбце ведущий элемент, т.е. элемент, с помощью которого удобно будет сделать нули под ним. Таким числом является единица. Поменяем местами первую и третью строки ($C_1 \leftrightarrow C_3$ элементарное преобразование 1-го вида):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 8 \end{array}\right)$$

С помощью элементарных преобразований 3-го типа делаем нули под ведущим элементом ($C_2 - 3C_1; C_3 - 2C_1$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 11 & -14 & -25 \\ 0 & 5 & -7 & -12 \end{array}\right).$$

Теперь выбираем ведущий элемент во втором столбце. Поскольку пока единицы нет, то её желательно создать. Для этого из второй строки вычтем удвоенную третью ($C_2 - 2\,C_3$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 5 & -7 & -12 \end{array}\right).$$

Делаем нуль под ведущим элементом ($C_3 - 5\,C_2$):

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -7 & -7 \end{array}\right).$$

Умножим третью строку на $\left(-\frac{1}{7}\right)$ ($\left(-\frac{1}{7}\right)\cdot C_3$ – элементарное преобразование 2-го типа):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 10 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Мы получили матрицу верхнетреугольного вида. Переходим к обратному ходу метода Гаусса. В качестве ведущего элемента выбираем единицу, стоящую в третьем столбце. Делаем нули над ней ($C_1 - 5\,C_3$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Последний шаг. С помощью единицы во втором столбце зануляем элемент над ней ($C_1 + 2\,C_2$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Получена матрица диагонального вида. Проверку полученного решения сделайте самостоятельно. Ответ: $x = 2, \quad y = -1, \quad z = 1$.■

Если при переходе к верхнетреугольной матрице в матрице системы возникает хотя бы одна нулевая строка (это означает, что определитель исходной системы равен нулю), то система либо не имеет решения вовсе, либо имеет бесчисленное множество решений.

Пример 9. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} 3x + 2y + z = 4 \\ -2x - 5y + 2z = -1 \\ x - 3y + 3z = 5 \end{cases}$

Решение.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & 1 & 4 \\ -2 & -5 & 2 & -1 \\ 1 & -3 & 3 & 5 \end{array}\right) \overset{C_1 \leftrightarrow C_3}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 5 \\ -2 & -5 & 2 & -1 \\ 3 & 2 & 1 & 4 \end{array}\right) \overset{\substack{C_2 + 2C_1 \\ C_3 - 3C_1}}{\sim}$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -11 & 8 & 9 \\ 0 & 11 & -8 & -11 \end{array}\right) \overset{C_3 + C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 3 & 5 \\ 0 & -11 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{array}\right).$$

Распишем последнюю строку полученной матрицы в виде уравнения:

$$0 \cdot x + 0 \cdot y + 0 \cdot z = -2$$

Очевидно, что это уравнение, а значит и вся система, решений не имеет. ■

Пример 10. *Решить систему уравнений* $\begin{cases} x-y+2z=1 \\ 4x+2y-z=2 \\ 5x+y+z=3 \end{cases}.$

<u>Решение.</u>

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & 2 \\ 5 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \overset{\substack{C_2-4C_1 \\ C_3-5C_1}}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -2 \\ 0 & 6 & -9 & -2 \end{array}\right) \overset{C_3-C_2}{\sim} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 6 & -9 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

В отличие от предыдущего примера, последняя строка непротиворечива. Она указывает на то, что третье уравнение системы является следствием первых двух. Таким образом, мы, фактически, получили систему из двух уравнений с тремя неизвестными. Такая система имеет бесчисленное множество решений. Для того, чтобы их найти, одну из переменных (её называют свободной) переносят в правую часть расширенной матрицы, а остальные переменные (их называют базисными или связными) выражают через эту свободную. Имеем

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1-2x_3 \\ 0 & 6 & -2+9_3 \end{array}\right) \overset{C_2\cdot\frac{1}{6}}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1-2x_3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}+\frac{3}{2}x_3 \end{array}\right) \overset{C_1+C_2}{\sim} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{2}{3}-\frac{1}{2}x_3 \\ 0 & 1 & -\frac{1}{3}+\frac{3}{2}x_3 \end{array}\right).$$

Таким образом, $x_1=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}x_3,\quad x_2=-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}x_3,\quad x_3=x_3.$

Это общее решение системы. Присваивая свободной переменной x_3 конкретные значения, можно получать частные решения, например,

$$\left(\frac{2}{3};-\frac{1}{3};0\right),\quad \left(-\frac{1}{3};\frac{8}{3};2\right) \text{ и т.д.}$$

Ответ: $\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}x_3;-\frac{1}{3}+\frac{3}{2}x_3;x_3\right)$.■

Отметим ещё одно достоинство метода Гаусса. Для систем линейных уравнений 4-го порядка и выше метод Гаусса оказывается эффективнее метода Крамера и матричного метода и приводит к решению гораздо быстрее.

Пример 11. *Решить систему уравнений*

$$\begin{cases} 2x_1+3x_2+4x_3+x_4=7 \\ x_1-2x_2+2x_3+3x_4=6 \\ 3x_1+5x_2-x_3+4x_4=-1 \\ 5x_1+4x_2+2x_3-x_4=-2 \end{cases}.$$

<u>Решение.</u>

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 3 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{C_1 \leftrightarrow C_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 2 & 3 & 4 & 1 & 7 \\ 3 & 5 & -1 & 4 & -1 \\ 5 & 4 & 2 & -1 & -2 \end{array}\right) \overset{\substack{C_2 - 2C_1 \\ C_3 - 3C_1 \\ C_4 - 5C_1}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 11 & -7 & -5 & -19 \\ 0 & 14 & -8 & -16 & -32 \end{array}\right) \overset{C_4 - C_3}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 7 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 11 & -7 & -5 & -19 \\ 0 & 3 & -1 & -11 & -13 \end{array}\right) \overset{C_2 - 2C_4}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 11 & -7 & -5 & -19 \\ 0 & 3 & -1 & -11 & -13 \end{array}\right) \overset{\substack{C_3 - 11C_3 \\ C_4 - 3C_2}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & -29 & -192 & -250 \\ 0 & 0 & -7 & -62 & -76 \end{array}\right) \overset{\substack{C_3 \cdot (-1) \\ C_4 \cdot (-1)}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & 29 & 192 & 250 \\ 0 & 0 & 7 & 62 & 76 \end{array}\right) \overset{C_3 - 4C_4}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -56 & -54 \\ 0 & 0 & 7 & 62 & 76 \end{array}\right) \overset{C_4 - 7C_3}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -56 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 454 & 454 \end{array}\right) \overset{C_4 \cdot 1/454}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 17 & 21 \\ 0 & 0 & 1 & -56 & -54 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{C_1 - 3C_4 \\ C_2 - 17C_4 \\ C_3 + 56C_4}}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{\substack{C_1 - 2C_3 \\ C_2 - 2C_3}}{\sim}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \overset{C_1 + 2C_2}{\sim} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

Проверку сделайте самостоятельно.
Ответ: $x_1 = -1,\ x_2 = 0,\ x_3 = 2,\ x_4 = 1.$ ■

1.3. Ранг матрицы

Рассмотрим матрицу A размера $m \times n$. Вычеркиванием каких–либо строк или столбцов можно вычленить квадратные подматрицы k-го порядка, где

$k \le \min(m;n)$. Определители таких подматриц называются минорами k-го порядка матрицы A.

Рангом матрицы A называется порядок отличных от нуля миноров этой матрицы.

Обозначают ранг матрицы обычно $rang\ A$ или $r(A)$.

Свойства ранга матрицы

1) Ранг матрицы $A_{m\times n}$ не превосходит меньшего из ее размеров, т.е. $rang\ A \le \min(m;n)$.

2) $rang\ A = 0$ тогда и только тогда, когда A – нулевая матрица.

3) Если A – квадратная матрица n-го порядка, то $rang\ A = n$ тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Нахождение ранга матрицы, используя непосредственно определение, довольно громоздко и трудоемко.

Теорема 4. *Ранг матрицы не изменяется при ее элементарных преобразованиях.*

С помощью элементарных преобразований можно привести матрицу к верхнетреугольному виду:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12}\dots & a_{1r}\dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}\dots & a_{2r}\dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0\dots & a_{rr}\dots & a_{rn} \end{pmatrix},$$

где $a_{ii} \ne 0$, $i = 1,2,...,r$; $r \le n$. Ранг верхнетреугольной матрицы равен r.

Пример 12. *Найти ранг матрицы* $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix}$.

Решение. Используя технику элементарных преобразований (как в методе Гаусса), получим верхнетреугольную матрицу:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 1 \\ 4 & 7 & 1 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_2 - 3C_1 \\ C_3 - 4C_1 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \end{pmatrix}^{C_3 - C_2} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 5 & -11 \end{pmatrix}$$

Таким образом, $rang\ A = 2$.■

Понятие ранга матрицы тесно связано с понятием линейной зависимости (независимости) ее строк (столбцов).

Строка (столбец) называются линейно зависимыми, если хотя бы одна из строк (столбцов) линейно выражается через остальные. В противном случае, строки (столбцы) называются линейно независимыми (подробнее читайте в п. 1.5.1).

Теорема 5. *Ранг матрицы равен максимальному числу ее линейно независимых строк (столбцов).*

1.4. Собственные векторы и собственные значения матрицы

Вектор $\bar{x} \neq 0$ называется собственным вектором матрицы A, если найдется такое число λ, что

$$A\bar{x} = \lambda\bar{x} \qquad (2)$$

Число λ называется собственным значением матрицы A, соответствующим вектору $\bar{x}$.

Равенство (2) можно записать в развернутом виде:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = \lambda x_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = \lambda x_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n = \lambda x_n \end{cases}.$$

Откуда получим

$$\begin{cases} (a_{11} - \lambda)x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + (a_{22} - \lambda)x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + (a_{nn} - \lambda)x_n = 0 \end{cases}$$

или в матричном виде

$$(A - \lambda E)\bar{x} = \bar{0}.$$

Полученная система всегда имеет нулевое решение. Для существования ненулевого решения необходимо и достаточно, чтобы определитель системы обращался в нуль:

$$\Delta(A - \lambda E) = \begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad (3)$$

Определитель $\Delta(A-\lambda E)$ является многочленом n-ой степени. Он называется характеристическим многочленом матрицы A, а уравнение (3)– характеристическим уравнением матрицы A.

Теорема 6. *Корни характеристического уравнения матрицы A (если они существуют) и только они являются собственными значениями этой матрицы.*

Пример 13. *Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:*

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}.$$

Решение. Составим характеристическое уравнение

$$\Delta(A-\lambda E)=\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -3-\lambda \end{vmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \lambda^2+\lambda-2=0,$$

откуда собственные значения матрицы A: $\lambda_1=-2$, $\lambda_2=1$.

Находим собственный вектор $\overline{x_1}$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=-2$. Для этого решаем матричное уравнение:

$$(A-\lambda_1 E)\cdot\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=0 \quad \text{или} \quad \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

откуда $-x_1-x_2=0$, т.е. $x_1=-x_2$. Положив $x_2=C$, мы получим, что вектор $\bar{x}_1=(-C;C)$ при любом $C\neq 0$ является собственным вектором матрицы A с собственным решением $\lambda_1=-2$. Аналогично, получим, что вектор $\bar{x}_2=(-4C;C)$ при любом $C\neq 0$ является собственным вектором матрицы A с собственным решением $\lambda_2=1$.■

Пример 14. *Найти собственные значения и собственные векторы матрицы:*

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -4 & -8 \\ -4 & 7 & -4 \\ -8 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

Решение. После преобразований (проделайте это самостоятельно) характеристическое уравнение примет вид:

$$\lambda^3-9\lambda^2-81\lambda+729=0.$$

Имеем далее

$$\lambda^2(\lambda-9)-81(\lambda-9)=0 \quad \Rightarrow \quad (\lambda-9)(\lambda^2-81)=0,$$

откуда $\lambda_1=9$, $\lambda_2=-9$.

Найдем соответствующий вектор $\bar{x}_1$, соответствующий собственному значению $\lambda_1=9$:

$$\begin{pmatrix} -8 & -4 & -8 \\ -4 & -2 & -4 \\ -8 & -4 & -8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Решая полученную систему методом Гаусса, получим $\bar{x}_1 = \left(-\frac{1}{2}C_1 - C_2; C_1; C_2 \right)$, где C_1 и C_2 произвольные числа не равные нулю одновременно.

Аналогично находим, что $\bar{x}_2 = \left(C_3; \frac{1}{2}C_3; C_3 \right)$ при любом $C_3 \neq 0$ есть собственный вектор матрицы A с собственным значением $\lambda_2 = -9$.

1.5. Пространства R^n.

Обозначим через R^n множество упорядоченных наборов по n действительных чисел: $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$, $n \in N$. Сами такие наборы называются n- мерными векторами.

Рассмотрим n-мерные векторы $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ и $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Два вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называются равными, если равны их соответствующие координаты: $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, n.$

Введем на множестве R^n линейные операции.

Суммой двух векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется вектор, координаты которого равны суммам соответствующих координат векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$:

$$\bar{a} + \bar{b} = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, \ldots, a_n + b_n).$$

Произведением вектора $\bar{a}$ на действительное число λ называется вектор, координаты которого равны произведению числа λ на соответствующие координаты вектора $\bar{a}$:

$$\lambda\bar{a} = (\lambda a_1, \lambda a_2, \ldots, \lambda a_n).$$

Линейные операции над векторами удовлетворяют свойствам:

1. $\bar{a} + \bar{b} = \bar{b} + \bar{a}$	5. $1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$
2. $\bar{a} + (\bar{b} + \bar{c}) = (\bar{a} + \bar{b}) + \bar{c}$	6. $\lambda \cdot (\mu \cdot \bar{a}) = (\lambda \cdot \mu) \cdot \bar{a}$
3. $\bar{a} + 0 = \bar{a}$	7. $\lambda \cdot (\bar{a} + \bar{b}) = \lambda\bar{a} + \lambda\bar{b}$
4. $\bar{a} + (-\bar{a}) = \bar{0}$	8. $(\lambda + \mu) \cdot \bar{a} = \lambda \cdot \bar{a} + \mu \cdot \bar{a}$

где λ, μ - произвольные действительные числа, $\bar{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ - нулевой вектор, $(-\bar{a}) = (-a_1, -a_2, \ldots, -a_n)$ – вектор, противоположный к вектору $\bar{a}$.

Множество R^n, с введенными на нем линейными операциями, называется **пространством R^n.**

Если линейные операции удовлетворяют указанным выше восьми свойствам, то соответствующее пространство называется линейным или векторным пространством. Таким образом, пространство R^n **является векторным пространством**.

Заметим, что элементами некоторых пространств могут быть не только векторы, но и различные другие объекты. Так, например, линейным пространством является множество всех квадратных матриц одинакового размера (объясните почему!). Несложно показать, что линейным будет пространство всех алгебраических многочленов степени, не превышающей натурального числа n (проверьте выполнение свойств 1-8). В тоже время, множество всех многочленов фиксированной степени не является линейным пространством, т.к. сумма двух таких многочленов может оказаться многочленом более низкой степени.

1.5.1. Линейная зависимость и линейная независимость системы векторов

Вектор $\bar{a}$ называется линейной комбинацией векторов $\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_k$, если найдутся действительные числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ такие, что:

$$\bar{a} = \alpha_1 \cdot \bar{a}_1 + \alpha_2 \cdot \bar{a}_2 + \ldots + \alpha_k \bar{a}_k .$$

Система векторов называется линейно зависимой, если хотя бы один из векторов системы является линейной комбинацией остальных.

Если ни один из векторов системы не представляется как линейная комбинация других, то система называется линейно независимой.

Линейная зависимость векторов в R^2 означает их коллинеарность (параллельность). Любая пара неколлинеарных векторов является линейно независимой.

Линейная зависимость трех векторов в R^3 означает их компланарность (принадлежность одной плоскости).

Теорема 7. *Система векторов* $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ *– линейно независимые в* R^n *тогда и только тогда, когда уравнение:*

$$x_1\bar{a}_1 + x_2\bar{a}_2 + \ldots + x_n\bar{a}_n = \bar{0}$$

имеет только тривиальное решение, т.е. $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$. *Система линейно зависима тогда и только тогда, когда данное уравнение имеет не тривиальное решение, т.е.* $x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \neq 0$.

Теорема 8. *(Критерий линейной зависимости (независимости) системы из двух векторов).*

Два вектора $\bar{a}$ *и* $\bar{b}$ *линейно зависимы (линейно независимы) тогда и только тогда, когда все их соответствующие координаты пропорциональны (непропорциональны).*

Пример 15. *Выяснить, являются ли линейно зависимыми векторы* $\bar{a} = (1,4,-2,3)$ *и* $\bar{b} = (2,8,-4,6)$.

Решение. Определим, пропорциональны ли координаты векторов:

$$\frac{1}{2} = \frac{4}{8} = \frac{-2}{-4} = \frac{3}{6} \text{ – верно.}$$

Следовательно, векторы $\bar{a}$ и $\bar{b}$ линейно зависимы. ■

Теорема 9. *(Критерий линейной зависимости (независимости) системы из* n *векторов в пространстве* R^n *).*

Системы векторов $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ *– линейно зависима (линейно независима) в* R^n *тогда и только тогда, когда определитель, составленный из координат этих векторов, равен нулю (отличен от нуля).*

Пример 16. *Определить, являются ли линейно зависимыми вектора*

$$\bar{a} = (3,-2,1), \qquad \bar{b} = (4,1,-3) \qquad \text{и} \qquad \bar{c} = (2,-3,-1)?$$

Решение. Составим и вычислим определитель из координат векторов:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ 2 & -3 & -1 \end{vmatrix} = 3(-1-9) + 2(-4+6) + 1(-12-2) = -40$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ - линейно независимы. ■

Теорема 10. *Любые* $n+1$ *векторов линейно зависимы в пространстве* R^n.

Замечание. Остается рассмотреть ситуацию, когда количество векторов в системе больше двух, но меньше n (например, три вектора в пространстве R^4). Итак, выясним линейную зависимость (независимость) системы $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ в пространстве R^n, где $2 < k < n$. Рассмотрим матрицу A, составленную из координат этих векторов, и вычислим ее ранг. С учетом теоремы 5, делаем вывод: если $rang\ A = k$, то система линейно независима, а если $rang\ A < k$, то система $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots, \bar{a}_n\}$ - линейно зависима.

1.5.2. Базисы в пространствах R^n.

Система векторов $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$ называется базисом пространства R^n, если любой вектор $\bar{a} \in R^n$ может быть единственным образом представлен в виде линейной комбинации векторов этой системы:

$$\bar{a} = \alpha_1 \bar{e}_1 + \alpha_2 \bar{e}_2 + \cdots + \alpha_n \bar{e}_n.$$

Числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ называют коэффициентами разложения вектора $\bar{a}$ по базису $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \ldots, \bar{e}_n\}$.

В пространстве R^2 примером базиса может служить система единичных ортов: $\{\bar{i}, \bar{j}\}$. Данный базис принято называть *естественным*, т.к. коэффициентами разложения любого вектора $\bar{a}$ по базису $\{\bar{i}, \bar{j}\}$ являются координаты этого вектора. Например, $\bar{a} = (2{,}5) = 2\bar{i} + 5\bar{j}$.

В пространстве R^3 естественный базис образует система векторов $\{\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}\}$.

Теорема 11. *Если система векторов образуют базис в R^4, то она линейно независима.*

Теорема 12. *Любые n линейно независимых векторов пространства R^n образуют в нем базис.*

Пример 17. *(Образец решения задачи 3 из контрольной работы). Даны векторы* $\bar{a} = (2,-1,2)$, $\bar{b} = (-3,1,-1)$, $\bar{c} = (1,-2,-3)$. *Определить образуют ли векторы $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ базис в пространстве R^3 и если да, то разложить вектор $\bar{d} = (17,-15,-7)$ по этому базису.*

<u>Решение.</u> Составим определитель из векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -3 \end{vmatrix} = 10$$

Т.к. $\Delta \neq 0$, то система $\{\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}\}$ - линейно независима и по теореме 12 образует базис в пространстве R^3. Значит, вектор d может быть единственным образом представлен в виде:

$$\bar{d} = x \cdot \bar{a} + y \cdot \bar{b} + z \cdot \bar{c}$$

с пока независимыми коэффициентами x, y, z. Переходя от равенства векторов к равенству их соответствующих координат приходим к системе линейных уравнений:

$$\begin{pmatrix} 17 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix},$$

откуда:

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = 17 \\ -x + y - 2z = -15. \\ 2x - y - 3z = -7 \end{cases}$$

Решая эту систему, например, методом Крамера (сделайте это самостоятельно), получим: $x = 3$, $y = -2$, $z = 5$.■

1.5.3. Скалярное произведение векторов. Норма вектора

Скалярным произведением вектора $\bar{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$ на вектор $\bar{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ называется число

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + \ldots + a_n \cdot b_n .$$

Свойства скалярного произведения

Для любых $\bar{a}$, $\bar{b}$, $\bar{c} \in R^n$ и для любого числа λ справедливо:

1. $\bar{a} \cdot \bar{b} = \bar{b} \cdot \bar{a}$;
2. $\lambda \cdot \bar{a} \cdot \bar{b} = \lambda \cdot (\bar{a} \cdot \bar{b})$;
3. $\bar{a} \cdot (\bar{b} + \bar{c}) = \bar{a} \cdot \bar{b} + \bar{a} \cdot \bar{c}$;
4. $\bar{a} \cdot \bar{a} \geq 0$, причем $\bar{a} \cdot \bar{a} = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$.

Нормой вектора $\bar{a} \in R^n$ называется арифметический корень из скалярного произведения вектора $\bar{a}$ на себя:

$$\|\bar{a}\| = \sqrt{\bar{a} \cdot \bar{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2} .$$

С геометрической точки зрения, норма вектора – это его длина.

Свойства нормы

Для любых $\bar{a}$, $\bar{b}$ и для любого числа λ справедливо:

1. $\|\bar{a}\| \geq 0$, причем $\|\bar{a}\| = 0 \Leftrightarrow \bar{a} = \bar{0}$;
2. $\|\lambda \bar{a}\| = |\lambda| \cdot \|\bar{a}\|$;
3. $|\bar{a} \cdot \bar{b}| \leq \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|$ - неравенство Коши-Буняковского;
4. $\|\bar{a} + \bar{b}\| = \|\bar{a}\| + \|\bar{b}\|$ - неравенство треугольника;

Углом между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется число $\varphi \in [0, \pi]$, определяемое равенством:

$$\cos\varphi = \frac{\bar{a} \cdot \bar{b}}{\|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\|} .$$

Откуда следует , что:

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = \|\bar{a}\| \cdot \|\bar{b}\| \cdot \cos\varphi ,$$

т.е. скалярное произведение двух векторов равно произведению длин этих векторов на косинус угла между ними. В этом состоит геометрический смысл скалярного произведения.

Векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называются ортогональными (перпендикулярными), если угол между ними $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Значит,

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0.$$

Пример 18. *При каком значении* x *векторы* $\overline{a} = (2{,}3, x)$ *и* $\overline{b} = (x, -1{,}5)$ *ортогональны?*
Решение.

$$\overline{a} \perp \overline{b} \Leftrightarrow \overline{a} \cdot \overline{b} = 0,$$

т.е.

$$2x - 3 + 5x = 0 \Rightarrow 7x = 3 \Rightarrow x = \frac{3}{7}.$$

Ответ: $\overline{a} \perp \overline{b}$ при $x = \frac{3}{7}$.■

1.5.4. Векторное произведение векторов

Векторным произведением вектора $\overline{a}$ на вектор $\overline{b}$ называется вектор $\overline{c}$, удовлетворяющий трем условиям (рис. 1):

1) $\overline{c} \perp \overline{a}$, $\overline{c} \perp \overline{b}$;

2) длина вектора $\overline{c}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на векторах $\overline{a}$ и $\overline{b}$;

3) векторы $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ образуют правую тройку, т.е. если смотреть из конца вектора $\overline{c}$, то кратчайший поворот от вектора $\overline{a}$ к вектору $\overline{b}$ должен происходить против часовой стрелки.

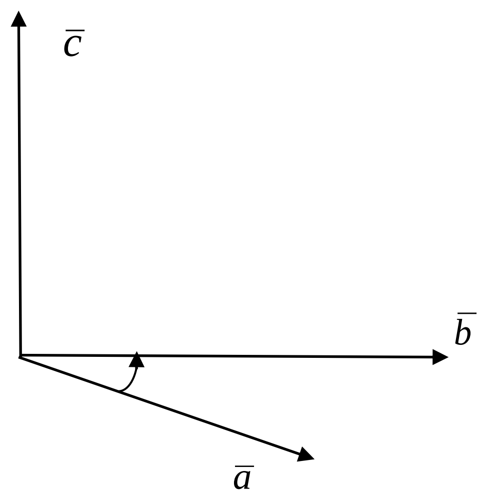

Рис. 1

Свойства векторного произведения

Для любых векторов для любых $\overline{a}$, $\overline{b}$, $\overline{c}$ и для любого числа λ справедливо:

1. $\overline{a} \times \overline{b} = -\overline{b} \times \overline{a}$;
2. $\lambda \cdot \overline{a} \times \overline{b} = \lambda(\overline{a} \times \overline{b})$;

3. $\bar{a}\times(\bar{b}+\bar{c})=\bar{a}\times\bar{b}+\bar{a}\times\bar{c}$;

4. $\bar{a}\|\bar{b}\Leftrightarrow\bar{a}\times\bar{b}=\bar{0}$;

5. Таблица умножения ортов:

$$\boxed{\begin{array}{lll} \bar{i}\times\bar{j}=\bar{k}, & \bar{j}\times\bar{k}=\bar{i}, & \bar{k}\times\bar{i}=\bar{j}, \\ \bar{j}\times\bar{i}=-\bar{k}, & \bar{k}\times\bar{j}=-\bar{i}, & \bar{i}\times\bar{k}=-\bar{j}, \\ \bar{i}\times\bar{i}=0, & \bar{j}\times\bar{j}=0, & \bar{k}\times\bar{k}=0. \end{array}}$$

6. Если $\bar{a}=(a_1,a_2,a_3)$, $\bar{b}=(b_1,b_2,b_3)$, то

$$\bar{a}\times\bar{b}=\begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Векторное произведение часто используют для нахождения площадей.

Пример 19. *Найти площадь треугольника с вершинами* $A(5,-1,2)$, $B(3,-4,-2)$, $C(-2,3,5)$.

<u>Решение.</u> Найдем координаты векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (напомним, что для этого нужно из координат конца вектора вычесть координаты начала):

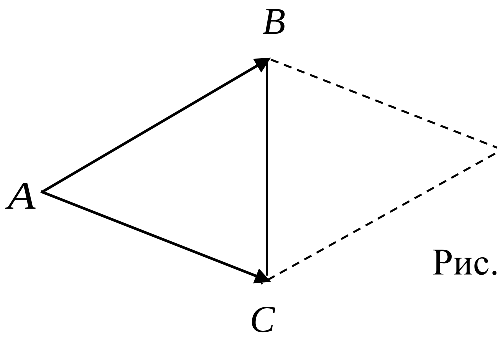

Рис. 2

Учитывая, что норма векторного произведения векторов $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ численно равна площади параллелограмма, построенного на этих векторах (рис. 2), для нахождения площади треугольника достаточно будет площадь параллелограмма разделить на два.

$$S_{\Delta ABC}=\frac{\left\|\overline{AB}\times\overline{AC}\right\|}{2},$$

$$\left\|\overline{AB}\times\overline{AC}\right\|=\begin{vmatrix} \bar{i} & \vec{j} & \bar{k} \\ -2 & -3 & -4 \\ -7 & 4 & 3 \end{vmatrix}=7\bar{i}+34\bar{j}-29\bar{k}=(7,34,-29).$$

$$\left\|\overline{AB}\times\overline{AC}\right\|=\sqrt{7^2+34^2+(-29)^2}=\sqrt{2046}$$

Таким образом, $S_{\Delta}=\dfrac{\sqrt{2046}}{2}$.■

1.5.5. Смешанное произведение векторов

Смешанным произведением векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ (в указанном порядке) называется скалярное произведение векторного произведения первых двух векторов на третий:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \left(\overline{a} \times \overline{b}\right) \cdot \overline{c}.$$

Свойства смешанного произведения векторов

Для любых векторов $\overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ справедливо:

1) При перестановке местами двух множителей смешанное произведение меняет знак:

$$\overline{b}\overline{a}\overline{c} = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}, \quad \overline{a}\overline{c}\overline{b} = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}, \quad \overline{c}\overline{b}\overline{a} = -\overline{a}\overline{b}\overline{c}$$

2) При циклической перестановке множителей смешанное произведение не меняется:

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \overline{b}\overline{c}\overline{a} = \overline{c}\overline{a}\overline{b}.$$

3) Если $\overline{a} = \left(a_1, a_2, a_3\right)$, $\overline{b} = \left(b_1, b_2, b_3\right)$, $\overline{c} = \left(c_1, c_2, c_3\right)$, то

$$\overline{a}\overline{b}\overline{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}.$$

4) $\overline{a}\overline{b}\overline{c} = 0 \Leftrightarrow \overline{a}$, $\overline{b}$ и $\overline{c}$ компланарны, т.е. лежат в одной плоскости.

5) Абсолютная величина смешанного произведения векторов равна объему параллелепипеда, построенного на этих векторах

$$V_{парал.} = \left| \overline{a}\overline{b}\overline{c} \right|.$$

Объем пирамиды, построенный на тех же векторах в 6 раз меньше:

$$V_{пирам.} = \frac{1}{6}\left| \overline{a}\overline{b}\overline{c} \right|.$$

Таким образом, скалярное произведение используют для нахождения длин и углов, векторное произведение – для вычисления площадей, а смешанное – для нахождения объемов.

<u>Пример 20.</u> *Образец выполнения задачи 4 из контрольной работы). Даны вершины пирамиды:* $A(-4,1,-3)$, $B(2,-5,1)$, $C(3,4,3)$ *и* $D(5,2,-4)$.

Найти:

a) Длину ребра BD;

b) Угол между ребрами AB *и* AC

c) Площадь грани BCD

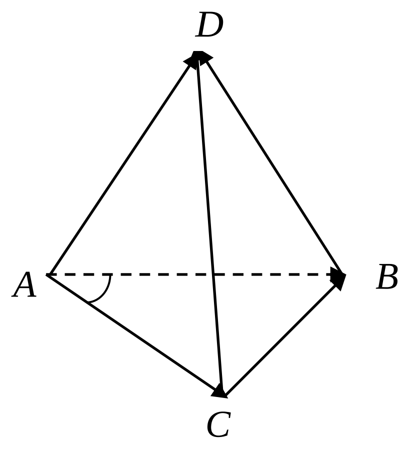

Рис. 3

d) Объем пирамиды

Решение.

а) Найдем вектор $\overline{BD}$, а затем его норму.
Это и будет длина ребра BD. $\overline{BD} = (3,7,-5)$,

$$\left\|\overline{BD}\right\| = \sqrt{3^2 + 7^2 + (-5)^2} = \sqrt{83}$$

b) Угол между ребрами AB и AC будем находить как угол между векторами $\overline{AB}$ и $\overline{AC}$ (рис. 3), используя формулу:

$$\cos\varphi = \frac{\overline{AB}\cdot\overline{AC}}{\left\|\overline{AB}\right\|\cdot\left\|\overline{AC}\right\|}.$$

$$\overline{AB} = (6;-6;4),\quad \overline{AC} = (7;3;6),$$

$$\cos\varphi = \frac{6\cdot 7 - 6\cdot 3 + 4\cdot 6}{\sqrt{36+36+16}\sqrt{49+9+36}} = \frac{48}{\sqrt{88}\sqrt{94}} = \frac{48}{4\sqrt{517}} = \frac{12}{517}.$$

Следовательно, $\varphi = \arccos\dfrac{12}{517}$.

c) $S_{\Delta BCD} = \dfrac{\left\|\overline{BC}\times\overline{BD}\right\|}{2}$, $\overline{BC} = (1,9,2)$, $\overline{BD} = (3,7,-5)$

$$\overline{BC}\times\overline{BD} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 1 & 9 & 2 \\ 3 & 7 & -5 \end{vmatrix} = -59\bar{i} + 11\bar{j} - 20\bar{k} = (-59,11,-20)$$

$$\left\|\overline{BC}\times\overline{BD}\right\| = \sqrt{(-59)^2 + 11^2 + (-20)^2} = \sqrt{4002},\ S_{\Delta BCD} = \frac{\sqrt{4002}}{2}.$$

d) Возьмем три вектора, на которых построена пирамида, например, $\overline{AB} = (6,-6,4)$, $\overline{AC} = (7,3,6)$ и $\overline{AD} = (9,1,-1)$, и найдем их смешанное произведение:

$$\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD} = \begin{vmatrix} 6 & -6 & 4 \\ 7 & 3 & 6 \\ 9 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -500.$$

Значит, $V_{пирам.} = \dfrac{1}{6}\left|\,\overline{AB}\,\overline{AC}\,\overline{AD}\right| = \dfrac{1}{6}\left|-500\right| = \dfrac{250}{3}$. ■

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА №1

Задача 1. *Решить систему линейных уравнений методом Крамера*

$$\begin{cases} ax + 2y + z = 4 \\ 3x - ay + 4z = b + 1 \\ -x + 5y + z = a - b \end{cases}$$

Задача 2. *Проверить справедливость равенств* $\Delta(AB) = \Delta(BA) = \Delta(A)\cdot\Delta(B)$, *где*

$$A = \begin{pmatrix} 2 & b & 1 \\ -1 & 4 & a \\ 5 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -a & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & b \end{pmatrix}.$$

Задача 3. *Даны векторы:* $\bar{a} = (1;3;a)$, $\bar{b} = (2;b;-1)$, $\bar{c} = (-3;a;b)$. *Определить, образуют ли векторы* $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ *базис в пространстве* R^3. *Если да, то разложить вектор* $\bar{d} = (5;0;4)$ *по этому базису.*

Задача 4. *Даны вершины пирамиды* $ABCD$: $A(2;a-1;0)$, $B(3;1;b-4)$, $C(-1;5;b-a)$, $D(a;2;3)$. *Найти:*

a) длину ребра BD;
b) угол между ребрами AB *и* AC;
c) площадь грани BCD;
d) объем пирамиды.

Пояснение *Числа* a *и* b *выбираются студентом по его зачетной книжке (или студенческому билету):*

a – *это последняя цифра в “зачетке”,*
b – *это предпоследняя цифра в “зачетке”.*

Желаем Вам успехов!

Для записей