МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«ДОНСКОЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
(ДГТУ)

ОСНОВЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

(теория, практика и контрольное задание №2 для студентов ДГТУ)

Ростов-на-Дону
2023

Основы дифференциального исчисления (теория, практика и контрольное задание №2 для студентов ДГТУ) – Ростов-на-Дону: ДГТУ, 2023,– 60 с.

Изложен курс лекций по дифференциальному исчислению. Приводится большое число примеров с решениями, а также заданий для самостоятельной работы. Содержит варианты контрольных заданий и образцы выполнения упражнений.

Методическое пособие предназначено для студентов очной и заочной форм обучения.

Составители: к.ф.-м.н. Богачева М.Н.
к.ф.-м.н. Гробер В.М.
к.ф.-м.н. Гробер О.В.
к.ф.-м.н. Гробер Т.А.

§1. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ

1.1. Функция как отображение

Пусть E - заданное множество точек числовой оси R.

Определение 1. Закон, который каждой точке $x \in E$ ставит в соответствие единственное вполне определенное число y, называется *функцией*, определенной на множество E или отображением множества E в R.

Обозначать функцию будем чаще всего буквой f, а также другими прописными или заглавными буквами латинского или греческого алфавитов. Запись $y = f(x)$ говорит о том, что значению аргумента x функция f ставит в соответствие число y. Множество E называется областью определения функции f. Функция f отображает каждое $x \in E$ в некоторое число $y = f(x)$, называемое образом точки x. Например, функция $y = x^2$ представляет собой операцию возведения аргумента x в квадрат. Так, числу $x_1 = 3$ она ставит в соответствие число $y_1 = 3^2 = 9$, числу $x_2 = 5$ – $y_2 = 5^2 = 25$ и т. д. Функция $y = \sin x$ каждому действительному числу x ставит соответствие его синус. Например, $\sin 0 = 0$, $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$, $\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\frac{\pi}{2} = 1$.

Определение 2. Если множество E заранее не задано, а функция f определена аналитической формулой $y = f(x)$, то *областью ее определения* называют множество всех значений $x \in E$, для которых $f(x)$ может быть вычислено.

Примеры:

1) $y = 5x^4 - 3x^2 + 2x + 7$ – многочлен; его значения могут быть вычислены при всех $x \in R$;

2) $y = \sin x$, $y = \cos x$, $y = a^x (a > 0, a \neq 1)$ тоже имеют областью определения всю числовую ось R;

3) $y = \dfrac{4x^5 - 2x^3 + 3}{x^2 - 12x + 35}$ – рациональная функция определена на всей числовой оси, за исключением тех точек, где знаменатель равен нулю, т.е. за исключением точек $x_1 = 5$ и $x_2 = 7$;

4) $y = \sqrt{x}$ - иррациональная функция. Она определена на множестве $[0;+\infty)$;

5) $y=\log_a x \quad (a>0, a\neq 1)$ – логарифмическая функция определена на множестве $[0;+\infty)$.

Определение 3. *Графиком функций* f называется множество точек пространства R^2 с координатами $(x, f(x))$, $x\in E$.

1.2. Понятие сложной функции

Пусть $u=\varphi(x)$ – функция, определенная на множестве $E\subset R$ со значениями на множестве $F\subset R$, а $y=f(u)$ – функция, определенная на F. В таком случае каждому $x\in R$ можно поставить в соответствие вещественное число y по закону $y=f(u(x))$. Тем самым, на множестве E определена функция, которую мы будем обозначать $f\circ\varphi$ и называть *сложной функцией* или *композицией функций* f и u. При этом, функцию u будем называть внутренней, а функцию f – внешней.

Например, $y=\ln(1+x^2)$ – сложная функция, $u=1+x^2$ – внутренняя функция, а $y=\ln u$ – внешняя.

1.3. Обратные функции

Пусть функция $y=f(x)$ определена на множестве $E\subset R$, а её значения заполняют множество F. Если каждому $y\in F$ можно поставить в соответствие единственное значение $x\in F$ так, что $f(x)=y$, то говорят, что на множестве F определена функция $x=f^{-1}(y)$, которая называется *обратной* для $y=f(x)$.

Ясно, что если $x=f^{-1}(y)$ – функция обратная для $y=f(x)$,то сама функция $y=f(x)$ является обратной для $x=f^{-1}(y)$. Поэтому функции $y=f(x)$ и $x=f^{-1}(y)$ называются *взаимно обратными*.

При этом выполняются равенства:

$$f(f^{-1}(y))=y \text{ и } f^{-1}(f(x))=x.$$

Примерами взаимно обратных могут служить следующие пары функций:

1) $y=x^2$ на отрезке $[2;3]$ и $x=\sqrt{y}$ на $[4;9]$;

2) $y=a^x, a>0, a\neq 1$ на всей числовой оси и $x=\log_a y, a>0, a\neq 1$ на $(0;+\infty)$;

3) $y=\sin x$ на $\left[-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right]$ и $x=\arcsin y$ на $[-1;1]$;

4) $y=\cos x$ на $[0;\pi]$ и $x=\arccos y$ на $[-1;1]$;

5) $y=tgx$ на $\left(-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right)$ и $x=arctg\,y$ на $(-\infty;+\infty)$;

6) $y=ctgx$ на $(0;\pi)$ и $x=arcctg\,y$ на $(-\infty;+\infty)$.

1.4. Элементарные функции

Следующие функции относят обычно к числу основных элементарных:

1) степенная $y=x^{\alpha}$, $\alpha\in R$;
2) показательная $y=a^{x}$, $a>0$, $a\neq 1$;
3) логарифмическая $y=\log_a x$, $a>0$, $a\neq 1$;
4) тригонометрическая $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$;
5) обратные тригонометрические функции $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

Определение 4 . *Элементарными функциями* называются все функции, которые можно составить из основных элементарных с помощью конечного числа алгебраических операций и композиций.

Например, элементарными являются функции $y=\ln(\sin 7x)$, $y=4\operatorname{arctg}^5 x+\cos\left(x^3+1\right)+10$.

§2 ПОНЯТИЕ ОКРЕСТНОСТИ ТОЧКИ. ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Определение 5. *Окрестностью (δ- окрестностью) точки* $a\in R$ называется симметричный относительно точки a интервал ($a-\delta;a+\delta$).

Точку a будем называть *предельной точкой множества* E, если в любой (даже очень мало) окрестности точки a есть точки множества E, т.е. точкам множества E можно «добраться» до точки a.

Пусть a - предельная точка множества E.

Определение 6. Число A называется *пределом функции* $y=f(x)$ *когда* x *стремится к* a, если величина $|f(x)-A|$ может быть сделана меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon>0$ за счет того, что x очень близко подойдет к точке a.

Строго это определение выглядит так:

$$\lim_{x \to +a} f(x) = A \overset{опред}{\Leftrightarrow} \forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 \; : \; |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x \in (a - \delta; a + \delta).$$

Определение 7. Число A называется пределом функции $y = f(x)$ когда x стремится к $+\infty$, если величина $|f(x) - A|$ может быть сделана меньше любого наперед заданного числа $\varepsilon > 0$ за счет того, что x станет очень большим положительным числом.

Строгое определение:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = A \overset{опред}{\Leftrightarrow} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists M > 0 \quad : \quad |f(x) - A| < \varepsilon \quad \forall x > M.$$

Аналогично дается определение пределам на $-\infty$.

Основные теоремы о пределах

Теорема 1.

$\lim\limits_{x \to a} c = c$ (предел постоянной равен самой постоянной).

Теорема 2. Если существуют $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то

$$\lim_{x \to a}(g(x) + f(x)) = \lim_{x \to a} g(x) + \lim_{x \to a} f(x),$$

$$\lim_{x \to a}(g(x) \cdot f(x)) = \lim_{x \to a} g(x) \cdot \lim_{x \to a} f(x),$$

$$\lim_{x \to a}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right) = \frac{\lim\limits_{x \to a} g(x)}{\lim\limits_{x \to a} f(x)}$$ (при дополнительном условии $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq 0$).

Теорема 3. Пусть в некоторой окрестности точки a $f(x) \geq 0$. Тогда из условия $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ следует, что $A \geq 0$.

Теорема 4. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = A$ и в некоторые окрестности точки a выполняется неравенства

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x),$$

то $\lim\limits_{x \to a} h(x) = A$.

Все сформулированные теоремы справедливы также и когда $x \to \infty$.

§3. БЕСКОНЕЧНО МАЛЫЕ И БЕСКОНЕЧНО БОЛЬШИЕ ФУНКЦИИ

Определение 8. Функция $\alpha(x)$ называется *бесконечно малой* функцией (б.м.ф.) при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \alpha(x) = 0$.

Аналогично $\alpha(x)$ – б.м.ф. при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x \to \infty} \alpha(x) = 0$.

Например, при $x \to 0$ бесконечно малыми являются функции: $\sin x$, $\operatorname{tg} x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $e^x - 1$, $\ln(1+x)$, а при $x \to 3$ – функции $(x-3)^2$, $5^{x-3} - 1$, $\sin(2x-6)$, $\ln(4-x)$, $\operatorname{acrtg} \dfrac{x-3}{8}$ и т.п.

Из теоремы 2 вытекают важные следствия:

1) сумма двух б.м.ф. является б.м.ф.
2) произведение б.м.ф. на функцию ограниченную есть б.м.ф.

Напомним, что функция $g(x)$ называется *ограниченной на множестве* E, если её значения на этом множестве меньше некоторого числа. Если функция имеет конечный предел $\lim\limits_{x \to a} g(x)$, то в окрестности точки a она ограничена.

Определение 9. Функция $\Phi(x)$ называется *бесконечно большой функцией* (б.б.ф.) при $x \to a$ (или при $x \to \infty$), если при приближение x к a её значения по абсолютной величине не ограничено растут, становятся больше любого наперед заданного числа. Тот факт, что $\Phi(x)$ – б.б.ф. обозначается записью $\lim\limits_{x \to a} \Phi(x) = \infty$.

Точно определении б.б.ф. таково: $\lim\limits_{x \to a} \Phi(x) = \infty$, если для любого сколько угодно большого положительного числа M найдется окрестность точки a ($a - \delta, a + \delta$), такая, что

$$|\Phi(x)| > M \quad \forall x \in (a - \delta, a + \delta).$$

Сумма двух бесконечно больших функций одного знака есть б.б.ф. того же знака.

Существует тесная связь между б.м. и б.б. функциями:

1) если $a(x)$ – б.м.ф. при a, то $\Phi(x) = \dfrac{1}{a(x)}$ – б.б.ф. при $x \to a$,

2) если $\Phi(x)$ – б.б.ф. при $x \to a$, то $\alpha(x) = \dfrac{1}{\Phi(x)}$ – б.м.ф. при $x \to a$.

Бесконечно малые и бесконечно большие функции можно сравнивать.

Функция $a(x)$ называется б.м.ф. более высокого порядка, чем $\beta(x)$ при $x \to a$ (обозначается $\lambda(x) << \beta(x)$) , если

$$\lim_{x \to a} \frac{a(x)}{\beta(x)} = 0 \ .$$

Например, при $x \to 4$ $a(x) = (x-4)^2$ б.м.ф. более высокого порядка, чем $\beta(x) = x - 4$, т.к.

$$\lim_{x \to 4} \frac{a(x)}{\beta(x)} = \lim_{x \to 4} \frac{(x-4)^2}{x-4} = \lim_{x \to 4} \frac{x-4}{1} = 0 \ .$$

Функция $\Phi(x)$ называется б.б.ф. более высокого порядка, чем $F(x)$ при $x \to a$ ($\Phi(x) >> F(x)$), если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\Phi(x)}{F(x)} = \infty$.

Функции $a(x)$ и $\beta(x)$ называются эквивалентными при $x \to a$, если $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{a(x)}{\beta(x)} = 1$. Обозначается этот факт таким образом: $a(x) \sim \beta(x)$. Это понятие относится и к б.м. и к б.б. функциям.

Важность понятий эквивалентности устанавливается следующей теоремой.

Теорема 5. Предел отношения функций равен пределу отношения функций им эквивалентных.

Основываясь на этом теореме, при решении задач на вычисление пределов эффективно используется такой признак:

> каждый б.б. или б.м. множитель числителя или знаменателя можно заменить эквивалентным.

Таблица эквивалентных функций:

- При $x \to 0$ имеют место следующие эквивалентности:

$\sin x \sim x$	$\operatorname{arctg} x \sim x$
$\operatorname{tg} x \sim x$	$\ln(1+x) \sim x$
$\arcsin x \sim x$	$e^x - 1 \sim x$

- При $x \to \infty$ каждый многочлен эквивалентен своему старшему члену:

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + ... + a_1 x + a_0 \sim a_n x^n \ .$$

Так, например, $4x^5+13x^4-6x^3+2x+7 \sim 4x^5$ при $x\to\infty$.

Приведем примеры.

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{\mathrm{tg}5x}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x}{5x}=\frac{1}{5}$;

2) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\mathrm{arctg}4x}{x^3+8x^2}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot4x}{x^2(x+8)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4}{x+8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$;

3) $\lim\limits_{x\to0}\frac{e^{5x^2}-1}{\mathrm{tg}7x\cdot\ln(1+2x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{5x^2}{7x\cdot2x}=\frac{5}{14}$;

4) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\arcsin4x}{e^{7x^2}-e^{2x^2}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot4x}{e^{2x^2}(e^{5x^2}-1)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{4x^2}{e^{2x^2}\cdot5x^2}=\frac{4}{5}$; (здесь мы воспользовались так же тем, что $e^0=1$);

5) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4-2x^3+3x+5}{16x^4-5x^2+3}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{7x^4}{16x^4}=\frac{7}{16}$;

6) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{(5x^2+2)(3x^4-x^3+2)}{(2x+7)^3(4x^3+9x^2+6)}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^2\cdot3x^4}{(2x)^3\cdot4x^3}=\frac{15}{32}$.

При решении следующих примеров учитывается связь между б.б. и б.м. функциями.

7) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot\sin3x}{\mathrm{tg}^2x\cdot\ln(1+10x)}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot3x}{x^2\cdot10x}=\frac{3}{10}\cdot\lim\limits_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty$;

8) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4-2x+7}{9x^5+3x^4+8}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^4}{9x^5}=\frac{5}{9}\cdot\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$;

9) $\lim\limits_{x\to0}\frac{x^2\cdot5x}{\sin x\cdot2^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}\frac{x\cdot(x+5)}{x\cdot2^{\frac{1}{x}}}=\lim\limits_{x\to0}(x+5)\cdot\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}=0$.

В последнем примере мы воспользовались тем, что при $x\to0$ функция $\frac{1}{x}$ является б.б.ф. отсюда следует, что $2^{\frac{1}{x}}$ – б.б.ф. при $x\to0$, но тогда функция $\frac{1}{2^{\frac{1}{x}}}$ является б.м. И её произведение на ограниченную (в окрестности 0) функцию $(x+5)$ тоже определяет собой б.м., вот почему предел равен нулю.

§4. НЕПРЕРЫВНЫЕ ФУНКЦИИ

Определение 10. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной в точке a, если она определена в некоторой окрестности точки a и

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

Определение 11. Функция $y = f(x)$ называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Известно, что все основные элементарные функции непрерывны, каждая в своей области определения. На самом деле, непрерывностью элементарных функций мы уже пользовались неоднократно при вычислении пределов.

Например, утверждая, что $\lim_{x \to a} x^2 = 9$, мы используем непрерывность функции $y = x^2$ в точке $a = 3$, а заявление о том, что $\lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \sin x = \frac{1}{2}$ означает непрерывность функции $y = \sin x$ в точке $\frac{\pi}{6}$.

Теорема 6. Сумма непрерывных в точке a функций является непрерывной функцией.

Теорема 7. Произведение непрерывных в точке a функций является непрерывной функцией.

Теорема 8. Частное от деления двух непрерывных в точке a функций представляет собой непрерывную функцию, если делитель в точке a отличен от нуля.

Теорема 9. Композиция непрерывных функций есть непрерывная функция.

Из теорем 6-9 следует, что все *элементарные функции непрерывны* в своих областях определения.

Приведем еще ряд важных свойств непрерывных функций.

Теорема 10 *(о сохранении знака)*. Если функция f непрерывна в точке a и положительна в этой точке, то она положительна и в некоторой окрестности точки a.

Теорема 11 *(о наибольшем и наименьшем значениях)*. Если функция f непрерывна на замкнутом отрезке $[a;b]$, то хотя бы в одной точке отрезка $[a;b]$ функция принимает наибольшее значение и хотя бы в одной – наименьшее.

Теорема 12 *(о промежуточном значении)*. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a;b]$ и на его концах принимает значения различных знаков. Тогда внутри отрезка $[a;b]$ найдется точка, в которой функция f обращается в нуль.

Точки, в которых нарушается непрерывность функции, называют точк*ами разрыва*.

При дальнейшей работе с элементарными функциями, полезно иметь в виду следующее:

1) многочлен, $\sin x$, $\cos x$, $a^x (a > 0, a \neq 1)$ непрерывны на всей числовой оси;

2) рациональная функция – отношение двух многочленов $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ непрерывна на всей числовой оси, кроме точек, где $Q_n(x) = 0$; эти точки являются точками разрыва функций $f(x)$;

3) $\operatorname{tg} x$ непрерывен на всей оси, кроме точек $x = \dfrac{\pi}{2} + \pi n$, а $\operatorname{ctg} x$ – на всей оси, кроме точек $x = \pi n$, $n \in Z$;

4) Логарифмическая функция $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ непрерывна при всех $x > 0$.

§5. ПРОИЗВОДНАЯ ФУНКЦИИ

5.1. Техника дифференцирования

Пусть на множестве E определена функция $y = f(x)$. Допустим, что x – произвольная точка множества E, а $x + \Delta x$ – близкая к ней точка, тоже принадлежащая этому множеству (рис. 1).

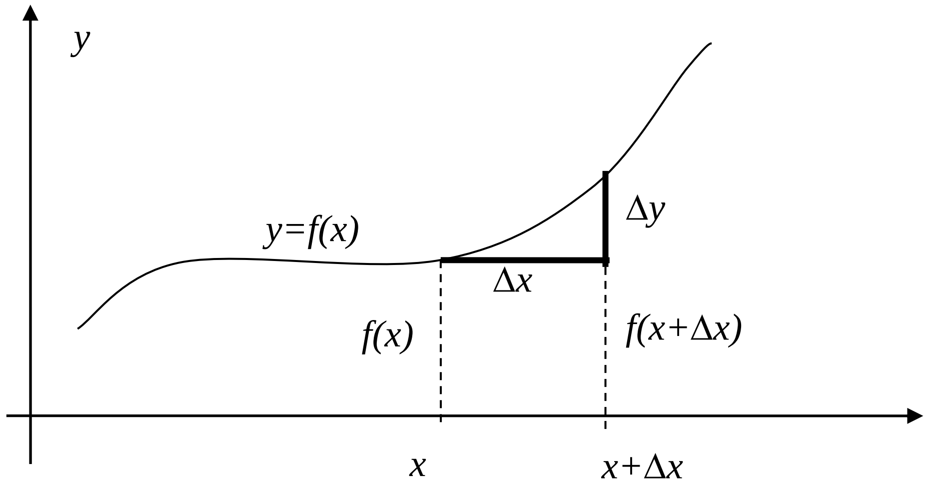

Рис. 1

Величина Δx называется приращением аргумента, а $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$ – приращением функции, соответствующим приращению аргумента Δx.

Определение 12. *Производной функцией* $y = f(x)$ в точке x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю:

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Если в точке x производная существует, то функция f называется дифференцируемой в этой точке.

Если t – время, а y – некоторый процесс (физический, химический, биологический, экономический), то $f'(t)$ представляет собой скорость (мгновенную) протекания этого процесса в момент t.

Понятие дифференцируемости и непрерывности функции связаны между собой.

Теорема 13. Если функция f дифференцируема в точке x, то она непрерывна в этой точке.

Обратно утверждение неверно. Так функция $f(x) = |x|$ непрерывна в точке $x = 0$, но не дифференцируема в этой точке.

Исходя из определения производной, выведены формулы для производных всех основных элементарных функций и получены основные законы дифференцирования:

1. $c' = 0$	2. $(x^a)' = ax^{a-1}, \forall a \in R$

3. $(a^x)'=a^x\ln a, (e^x)'=e^x$	4. $(\ln x)'=\frac{1}{x}$
5. $(\sin x)'=\cos x$	6. $(\cos x)'=-\sin x$
7. $(\mathrm{tg}x)'=\frac{1}{\cos^2 x}$	8. $(\mathrm{ctg}x)'=-\frac{1}{\sin^2 x}$
9. $(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	10. $(\arccos x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11. $(\mathrm{arctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$	12. $(\mathrm{arcctg}x)'=\frac{1}{1+x^2}$

Если $U=U(x)$ и $V=V(x)$ – дифференцируемые функции, то

I. $(U+V)'=U'+V'$
II. $(cU)'=cU'$
III. $(U\cdot V)'=U'V+U\cdot V'$
IV. $\left(\frac{U}{V}\right)'=\frac{U'V-U\cdot V'}{V^2}$

V. Если $U=U(x)$ – дифференцируемая функция в точке x, а $y=f(U)$ – дифференцируемая в точке U, то производная сложной функции $y=f(U(x))$ равна производной внешней функции по своему аргументу, умноженной на производную внутренней функции по своему:

$$y'_x=y'_U\cdot U'_x.$$

Примеры нахождения производных.

Пример 1. $y=5^x+7\sin x-x^6+3$. Найти y'.

Решение. Используя законы дифференцирования I и II, а также формулы 3), 5), 2), 1), имеем:

$$y'=5^x\ln 5+7\cos x-6x^5.$$

Пример 2. $y=x^3\sqrt{x}+4\sqrt[5]{x^2}-\frac{3}{x^3}$. Найти y'.

Решение. Вначале перепишем данную функцию в более удобном виде, заменив все корни на степени.

$$y=x^{\frac{7}{2}}+4x^{\frac{2}{5}}-3x^{-3}.$$

Теперь находим производную, используя законы I,II и формулу 2):

$$y=\frac{7}{2}x^{\frac{5}{2}}+\frac{8}{5}x^{-\frac{3}{5}}+9x^{-4}.$$

Пример 3. $y = x^4 \sin x$. Найти y'.

Решение. Используем закон III и формулы 2) и 5):

$$y' = 4x^3 \cdot \sin x + x^4 \cos x.$$

Пример 4. $y = \dfrac{x^5}{x^2+1}$. Найти y'.

Решение. Воспользуемся законом IV, т.е. формулой для производной частного:

$$y' = \frac{5x^4(x^2+1) - x^5 \cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{3x^6 + 5x^4}{(x^2+1)^2}.$$

Теперь обратим внимание на закон V, дающий возмоджно сть дифференцировать сложные функции.

Пример 5. $y = \ln(x^4 + 2x)$. Найти y'.

Решение. Производная внешней функции по своему аргументу равна $\dfrac{1}{x^4+2x}$, а производная внутренней функции, т.е. производная выражения, стоящего в скобках, равна $4x^3 + 2$; поэтому

$$y' = \frac{1}{x^4+2x} \cdot (4x^3 + 2).$$

Пример 6. $y = (\operatorname{arctg}(x^3 + 2x))^9$. Найти y'.

Решение. Здесь сложная функция состоит уже из трех звеньев: внешняя – девятая степень, ее аргументом является – арктангенс, а аргументом арктангенса – выражение $(x^3 + 2x)$. Поэтому, дифференцируя в цепочку, получаем:

$$y' = 9(\operatorname{arctg}(x^3 + 2x))^8 \cdot \frac{1}{1 + (x^3 + 2x)^2} \cdot (3x^2 + 2).$$

Пример 7. $y = (\operatorname{tg} x)^5$. Найти y'.

Решение. Данная функция представляет собой частное. Поэтому в основу дифференцирования закладываем закон IV, но в ходе дифференцирования учитываем, что первое слагаемое числителя, а также оба слагаемых знаменателя – функции сложные:

$$y' = \frac{(2\cos x \cdot (-\sin x) + 3x^2) \cdot (e^{\sin x} + \operatorname{tg} 2x) - (\cos^2 x + x^3)\left(e^{\sin x} \cdot \cos x + \dfrac{1 \cdot 2}{\cos^2 2x}\right)}{(e^{\sin x} + \operatorname{tg} 2x)^2}.$$

Приведем два примера без объяснений.

Пример 8. $y = \ln(\mathrm{arctg}x) + e^{\mathrm{tg}5x} \cdot x^4$. Найти y'.

Решение.

$$y' = \frac{1}{\mathrm{arctg}x} \cdot \frac{1}{1+x^2} + e^{\mathrm{tg}5x} \cdot \frac{1}{\cos^2 5x} \cdot 5 \cdot x^4 + e^{\mathrm{tg}5x} \cdot 4x^3.$$

Пример 9. $y = \dfrac{x + \ln 4x}{e^x + e^{-x}} + \sin(x^4)$. Найти y'.

Решение.

$$y' = \frac{(1 + \frac{1}{4x} \cdot 4) \cdot (e^x + e^{-x}) - (x + \ln 4x) \cdot (e^x + e^{-x} \cdot (-1))}{(e^x + e^{-x})^2} + \cos(x^4) \cdot 4x^3.$$

5.2. Геометрический смысл производной

Пусть $y = f(x)$ – дифференцируемая функция (рис.2), M – точка графика с абсциссой x, N – точка с абсциссой $x + \Delta x$, $NP = \Delta y = f(x + \Delta y) - f(x)$.

Напомним, что касательной к графику функций $f(x)$ в точке M называется предельное положение секущей MN, когда точка N, двигаясь вдоль кривой, приближается к точке M.

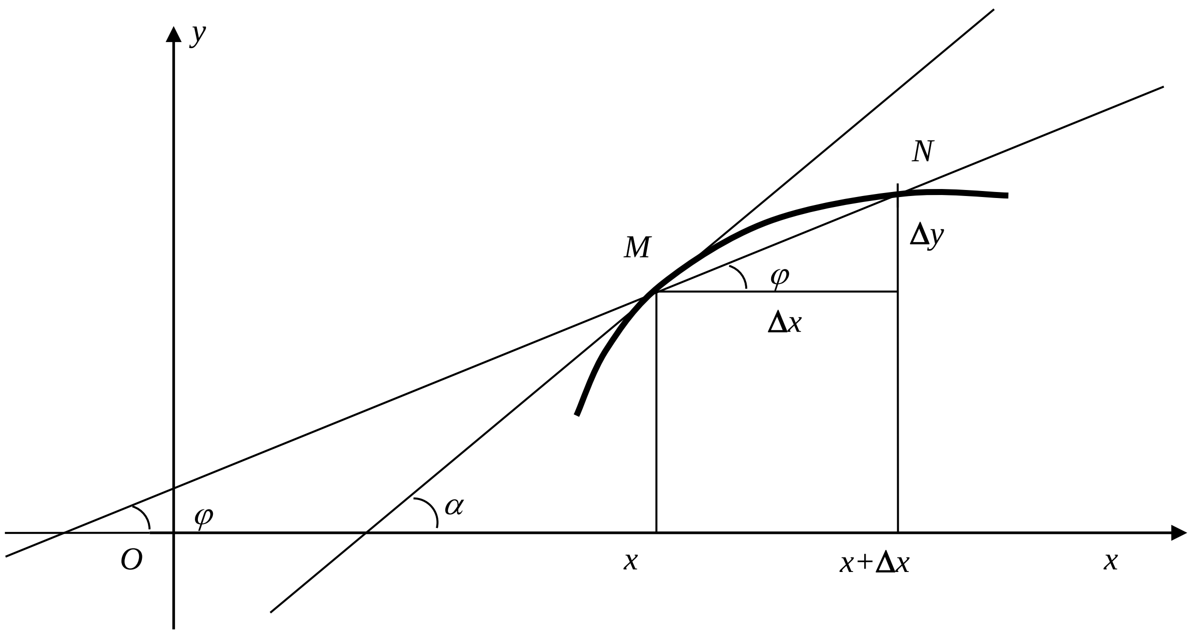

Рис. 2

Обозначим через φ угол наклона к оси абсцисс хорда MN, а через α – угол наклона касательной к кривой в точке M. Ясно, что, когда $N \to M$, то $\varphi \to \alpha$. Тогда

$$y' = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\varphi \to a} \mathrm{tg}\varphi = \mathrm{tg}\alpha .$$

Здесь мы воспользовались непрерывностью функции tg φ.

Таким образом, *производная функции* $y = f(x)$ *в точке* x *представляет собой угловой коэффициент касательной*, проведенной к данной кривой в точке $M(x, f(x))$. В этом состоит геометрический смысл производной.

Составим теперь уравнение касательной, проведенной в точке $M_0(x_0, y_0)$ к кривой $y = f(x)$. Уравнение всякой прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$, имеет вид: $y - y_0 = k(x - x_0)$.Для того, чтобы из этого пучка прямых выделить касательную, надо взять $k = f'(x_0)$. Таким образом, *уравнение касательной* принимает вид:

$$y - y_0 = f'(x_0)(x - x_0).$$

Нормаль к данной кривой в точке M_0 называется прямая, проведенная через M_0 перпендикулярно касательной. Используя условия перпендикулярности двух прямых ($k_2 = -\frac{1}{k_1}$), получим *уравнение нормали*:

$$y - y_0 = -\frac{1}{f'(x_0)}(x - x_0).$$

Пример 10. Найти уравнения касательной и нормали к параболе $y = x^2$ в точке с абсциссой $x_0 = 2$.

Решение. Найдем ординату точки M_0: $y_0 = f(2) = 4$, вычислим производную функции $f(x)$: $f'(x) = 2x$. Тогда $f'(x_0) = f'(2) = 4$. Значит, угловой коэффициент касательной $k_{кас} = 4$, а угловой коэффициент нормали $k_{норм} = -\frac{1}{4}$.

Таким образом, уравнение касательной будет иметь вид

$$y - 4 = 4(x - 2),$$

А уравнение нормали:

$$y - 4 = -\frac{1}{4}(x - 2).$$

§6. НАХОЖДЕНИЕ ПРЕДЕЛОВ. ПРАВИЛО ЛОПИТАЛЯ

Следующая теорема дает мощное средство вычисления пределов.

Теорема 14 (*правило Лопиталя*). Пусть функции f и g

1) непрерывны в точке a и в некоторой ее окрестности;
2) дифференцируемы в окрестности точки a;
3) $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) = 0$.
4) Существует $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$.

Тогда существует предел отношения данных функций и справедливо равенство:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Т.е. предел отношения функций равен пределу отношения их производных.

Пример 11. Вычислить $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^5 + 8x - 9}{4x^4 + 3x - 7}$.

Решение. Условия 1) – 3) очевидно выполнены. Условие 4) всегда проверяется в ходе вычислений. Применяя правило Лопиталя, получаем:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^5 + 8x - 9}{4x^4 + 3x - 7} = \lim_{x \to 1} \frac{5x^4 + 8}{16x^3 + 3} = \frac{13}{19}.$$

Замечание. Теорема остается справедливой и в следующих случаях:

1) Когда $\lim\limits_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = +\infty$ или $= -\infty$,
2) когда $x \to +\infty$ или $x \to -\infty$,
3) когда $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$ и $\lim\limits_{x \to a} g(x) = \infty$.

Таким образом правило Лопиталя применимо, когда $f(x)$ и $g(x)$ являются либо обе бесконечно малыми (неопределенность вида $(\frac{0}{0})$), либо обе – бесконечно большими(неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$).

Пример 12. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{22+x}-5}{\sqrt{13+x}-4}$.

Решение. Здесь мы снова встречаем неопределенность вида $(\frac{0}{0})$,что и позволяет использовать правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 3}\frac{\frac{1}{2\sqrt{22+x}}}{\frac{1}{2\sqrt{13+x}}}=\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{13+x}}{\sqrt{22+x}}=\frac{4}{5}.$$

Пример 13. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}$.

Решение. Числитель и знаменатель дроби является б.б. функциями, т.е. перед вами – неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$. Применив правило Лопиталя, получим:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=0.$$

Результат говорит о том, что функция $y=\ln x$ хоть и стремится к $+\infty$, но значительно медленнее, чем функция $g(x)=x$. Убедитесь самостоятельно в том, что $\ln x\to+\infty$ значительно медленнее, чем функция $x^{0,01}$.

Пример 14. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2}{5^x}=A$

Решение. Поскольку числитель и знаменатель являются б.б.ф. при $x\to+\infty$,то применив правило Лопиталя два раза подряд, имеем:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{5^x\ln 5}=0.$$

Пример 15. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 7x-\sin 3x}{e^{16x}-1}$.

Решение.

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\cos 7x\cdot 7-\cos 3x\cdot 3}{e^{16x}\cdot 16}=\frac{7-3}{16}=\frac{1}{4}.$$

Пример 16. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^{12}+3x^{8}-7}{20x^{12}+10x^{11}-4}$.

Решение. Здесь правило Лопиталя использовать не рационально. В самом деле. Каждое применение этого правила снижало бы степень числителя на 1 и степень знаменателя лишь на 1. в то же время, заменяя числитель и знаменатель эквивалентными б.б. функциями. Сразу получаем:

$$A=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^{12}}{20x^{12}}=\frac{4}{20}=\frac{1}{5}.$$

Во многих случаях полезно сочетать использование правила Лопиталя с заменой эквивалентных.

Пример 17. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x^2}-e^{2x^2}}{\sin x\cdot \operatorname{arctg}4x}$.

Решение. Сначала б.м. множители знаменателя заменим эквивалентными и уже затем применим правило Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}-e^{2x^2}}{4x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}\cdot 10x-e^{2x^2}\cdot 4x}{8x}=\lim_{x\to 0}\frac{e^{5x^2}\cdot 5-e^{2x^2}\cdot 2}{4}=\frac{3}{4}.$$

Пример 18. Вычислить $A=\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

Решение. Здесь перед нами неопределенность вида $(\infty-\infty)$. После приведения выражения в скобках к общему знаменателю получим под знаком предела отношение двух б.м.ф., что дает возможность и замены эквивалентных множителей и применения правила Лопиталя:

$$A=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x\cdot\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-1}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{-\sin x}{2}=0.$$

В случае неопределенностей вида 0^0, ∞^0 или 1^∞ следует предварительно прологарифмировать заданную функцию, а затем найти предел ее логарифма.

Пример 19. Найти $A=\lim\limits_{x\to\infty}\left(7^x+4x\right)^{\frac{1}{x}}$.

Решение. Прологарифмируем обе части равенства и, с учетом того, что логарифм является непрерывной функцией, переставим знаки логарифма и предела:

$$\ln A = \ln(\lim_{x\to\infty}\left(7^x+4x\right)^{\frac{1}{x}}) = \lim_{x\to\infty}\ln\left(7^x+4x\right)^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}\left(7^x+4x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(7^x+4x)}{x}.$$

Мы получили неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$. Значит, теперь можно применить правило Лопиталя:

$$\ln A = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{7^x+4x}\cdot\left(7^x\ln 7+4\right)}{1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\left(7^x\ln 7+4\right)}{7^x+4x}.$$

Перед нами вновь неопределенность вида $(\frac{\infty}{\infty})$. Применим правило Лопиталя еще дважды:

$$\ln A = \lim_{x\to\infty}\frac{7^x(\ln 7)^2}{7^x\ln 7+4} = (\frac{\infty}{\infty}) = \lim_{x\to\infty}\frac{7^x(\ln 7)^3}{7^x(\ln 7)^2} = \ln 7.$$

Итак, $\ln A = \ln 7$

Отсюда, $A = 7$.

Пример 20. Найти $A = \lim_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}$.

Решение.

$$\ln A = \ln(\lim_{x\to 0}(\sin x)^{\operatorname{tg}x}) = \lim_{x\to 0}\left(\ln(\sin x)^{\operatorname{tg}x}\right) = \lim_{x\to 0}\left(\operatorname{tg}x\ln(\sin x)\right) = (0\cdot\infty) = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(\sin x)}{\operatorname{ctg}x} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{\sin x}\cos x}{-\frac{1}{\sin^2 x}} = -\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 x\cdot\cos x}{\sin x} = -\lim_{x\to 0}\sin x\cdot\cos x = 0$$

Итак, $\ln A = 0 \Rightarrow A = 1$.

§7. НАИБОЛЬШЕЕ И НАИМЕНЬШЕЕ ЗНАЧЕНИЯ ФУНКЦИИ НА ОТРЕЗКЕ. ЭКОНОМИЧЕСКИЕ И ИНЖЕНЕРНЫЕ ЗАДАЧИ

Постановка задачи: найти наибольшее наименьшее значения дифференцируемой функции $y = f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Алгоритм решения:

1) находим критические точки, принадлежащие отрезку $[a, b]$;

2) вычисляем значения функции в этих точках и на концах отрезка;
3) из полученных значений выбираем наибольшее и наименьшее.

Пример 21. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 + 6x^2$ на отрезке [-3; 1].

Решение. Находим критические точки:

$$y' = 3x^2 + 12x \Rightarrow 3x^2 + 12x = 0 \Rightarrow 3x(x+4) = 0 \Rightarrow x_1 = -4, x_2 = 0 .$$

Точка $x_1 = -4$ не принадлежит отрезку [-3;1] и, поэтому, мы оставляем её без внимания. Теперь вычисляем значения данной функции в точке $x_2 = 0$ и на концах отрезка, т.е. в точка a=-3 и b = 1:

$$f(0) = 0;\ f(-3) = 27;\ f(1) = 7,$$

откуда видно, что

$$f_{наиб} = f(-3) = 27;\ f_{наим} = f(0) = 0 .$$

Пример 22. Функция суточного спроса Q на мороженое (тыс. шт.) в зависимости от цены P за одну порцию (руб.) имеет вид $Q = 4.5 - \sqrt{p}$. Эффективная область «работы» этой формулы от 4 до 16 руб. При какой цене за порцию мороженого совокупная выручка будет наибольшей?

Решение. Совокупная выручка определяется формулой $F = Q \cdot p$, где Q – количество реализованных порций мороженого (тыс. шт.), p – цена за одну порцию (руб.). Тогда функция совокупной выгрузки в зависимости от цены примет вид $F(p) = (4.5 - \sqrt{p})p$. Требуется найти наибольшее значение этой функции на отрезке [4;16].

Находим критические точки функции, принадлежащие данному отрезку:

$$F'(p) = 4.5 - 1.5\sqrt{p} \Rightarrow \quad 4.5 - 1.5\sqrt{p} = 0 \Rightarrow \quad \sqrt{p} = 3 \Rightarrow \quad p = 9 .$$

Вычисляем значения функции в критической точке и на концах отрезка:

$$F(9) = (4.5 - 3) \cdot 9 = 13.5;$$
$$F(4) = (4.5 - 2) \cdot 4 = 10;$$
$$F(16) = (4.5 - 4) \cdot 16 = 8$$

Следовательно, при цене 9 руб. за порцию совокупная выручка будет наибольшей и составит 13.5 тыс. руб.

Пример 23. Завод *D* нужно соединить шоссейной дорогой с прямолинейной железной дорогой, на которой расположен город *A*. Расстояние *DB* до железной дороги равно 140 км., а расстояние *AB* по железной дороге равно 300 км. (рис. 16). Стоимость перевозок по шоссе в два раза дороже стоимости перевозок по железной дороге. В какую точку *C* следует провести шоссейную дорогу, чтобы стоимость перевозок груза от завода к городу была минимальной?

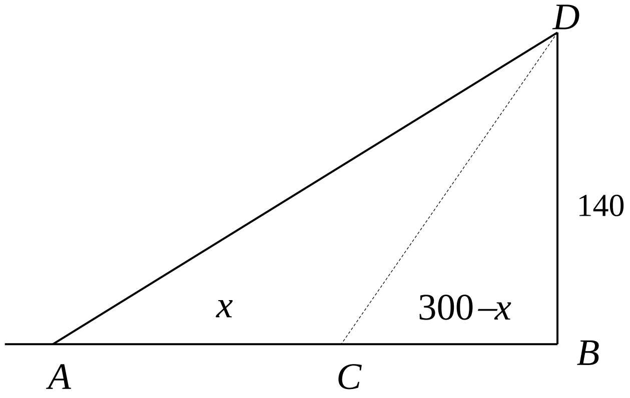

Рис. 16

Решение. Обозначим $AC = x$. Ясно, что $0 \le x \le 300$.

Пусть стоимость перевоза по железной дороге (стоимость тоннокилометра) равна *p*. Тогда стоимость перевоза по шоссе равна 2*p*. Общая стоимость перевоза груза

$$f = 2p \cdot DC + p \cdot AC,$$

откуда

$$f(x) = 2p\sqrt{140^2 + (300 - x)^2} + p \cdot x,$$

т.е.

$$f(x) = p(2\sqrt{140^2 + (300 - x)^2} + x).$$

Мы должны выбрать наименьшее значение этой функции на отрезке [0;300]. Найдём производную:

$$f'(x) = p\left(2\frac{(300 - x)\cdot(-1)}{\sqrt{140^2 + (300 - x)^2}} + 1\right) = p\,\frac{2(x - 300) + \sqrt{140^2 + (300 - x)^2}}{\sqrt{140^2 + (300 - x)^2}}.$$

Из условия $\mathrm{f}'(\mathrm{x}) = 0$ определяем критическую точку:

$$x = 300 - \frac{140}{\sqrt{3}} \approx 219.1$$

Вычисляем значение стоимости перевозок в критической точке и на концах рассматриваемого отрезка:

$$f(0) = p(2\sqrt{140^2 + (300 - x)^2}) \approx 662.11 \ p.$$

$$f(219.1) = p(2\sqrt{140^2 + (80.9)^2} + 219.1) \approx 542.48 \ p.$$

$$f(300) = p(2\sqrt{140^2} + 300) \approx 580 \text{ р.}$$

Итак, чтобы стоимость перевоза груза от завода *D* к городу *A* была наименьшей, следует шоссейную дорогу провести в пункт *C*, находящийся от города на расстоянии 219.1 км.

§ 8. ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ

8.1 Понятие, предел и непрерывность функции двух переменных

В науке и в инженерной практике часто приходится иметь дело с функциями, зависящими не от одного аргумента, а от нескольких. Например, объем прямо кругового цилиндра *V* является функцией радиуса его основания *R* и высоты *H*: $V=\pi \cdot R^2 \cdot H$, а количество тепла *Q*, выделяемое в участке проводника, пропорционально времени прохождения тока *t*, сопротивлению участка *R* и квадрату силы тока *J*: $Q = J^2 Rt$, т.е. являются функцией трех переменных.

Переменная *z* называется функцией аргументов *x* и *y*, если каждой паре чисел (*x*, *y*) из некоторого множества на плоскости ставится в соответствие по определенному закону единственное вполне определенной значение *z*.

Тот факт, что *z* есть функция аргументов *x* и *y*, записывается так $z = f(x,y)$.

Множество точек плоскости (*x* и *y*), для которых z имеет смысл (т.е. может быть вычислено) называется областью определения функции *f*.

Например, областью определения функции $z = \dfrac{x + y}{\sqrt{1\text{-}x^2 - y^2}}$ являются множество точек плоскости, координаты которых удовлетворяют неравенству

$$x^2 + y^2 < 1,$$

т.е. внутренность единичного круга с центром в начале координат.

Графиком функции $z = f(x,y)$ с областью определения *D* называется множество точек пространства R^3 с координатами $(x, y, f(x,y))$, где $(x,y) \in D$.

Обычно графиком функции двух переменных является некоторая поверхность (рис. 17).

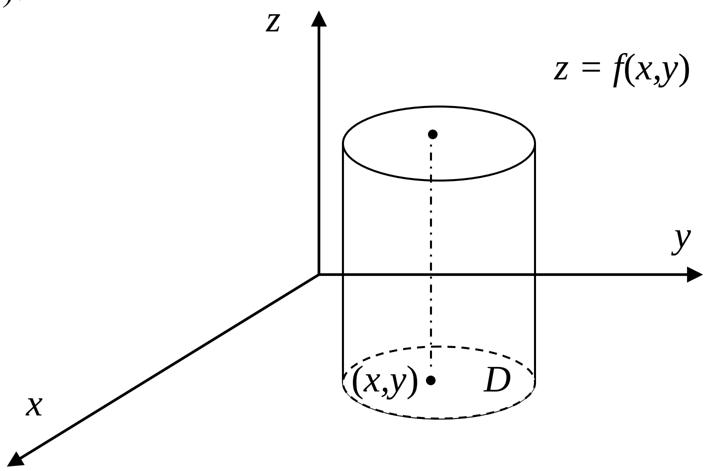

Рис. 17

Пусть $M_0(x_0,\ y_0)$ – фиксированная точка плоскости. Окрестностью (δ-окрестностью) точки M_0 называется открытый круг радиуса δ с центром в этой точке. δ-окрестность точки M_0 обозначается $U_\delta(M_0)$.

Пусть функция $z = f(x,y) = f(M)$ определена в окрестности точки M_0. Число A называется пределом функции $f(M)$ при $M \to M_0$, если $\left| f(M) - A \right|$ может быть сделано меньше любого наперед заданного положительного числа ε за счет того, что точка M очень близко подойдет к точке M_0, т.е. окажется в очень малой окрестности этой точки. Вот точное

Определение 18.

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \ U_\delta(M_0) : \left| f(M) - A \right| < \varepsilon \quad \forall M \in U_\delta(M_0).$$

Все теоремы о пределах, которые имели место для функции одной переменной, здесь тоже справедливы.

Определение 19 Функция $z = f(M)$ называется непрерывной в точке M_0, если она определена в этой точке, в некоторой ее окрестности и

$$\lim_{M \to M_0} f(M) = f(M_0).$$

Функция $z = f(M)$ называется непрерывной на множестве E, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Все основные теоремы о непрерывных функциях, которые верны для функций одной переменной, имеют место и для функций двух, переменных.

8.2. Частные производные

Предположим, что функция $z = f(x,y)$ определена в области D (рис. 18).

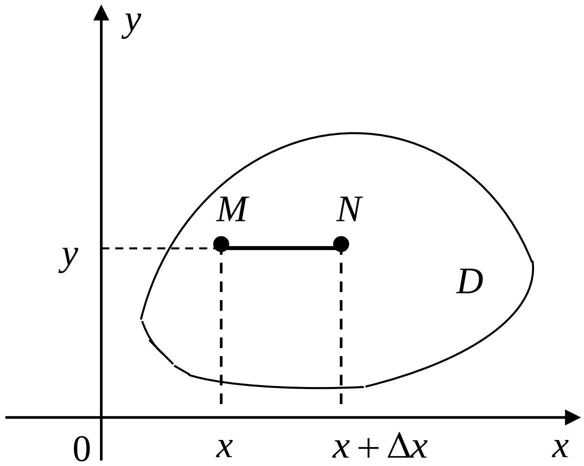

Рис. 18

Пусть $M(x, y)$ – произвольная точка области D и $N(x+\Delta x, y)$ – близкая к ней точка с той же ординатой, тоже лежащая в D.

Величина $f(x+\Delta x, y) - f(x, y)$ называется частным приращением функции z по переменной x, а предел отношения

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x},$$

если он существует, называется *частной производной функции* z по аргументу x и обозначается любым из символов $\frac{\partial z}{\partial x}$ или z'_x. Итак,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x}.$$

Аналогично определяется частная производная по у: ($\frac{\partial z}{\partial y}$ или z'_y):

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \lim_{\Delta y \to 0} \frac{f(x, y+\Delta y) - f(x, y)}{\Delta y}.$$

Принцип нахождения частных производных вытекает из самого определения. Для нахождения частной производной по x достаточно y "заморозить на время дифференцирования" и находить производную функции z по переменной x самым обычным образом, т.е. при дифференцировании по x на

y следует смотреть как на постоянную и, наоборот, при дифференцировании по y надо "замораживать" x.

Пример 24. $z = 4x^3y^5 - 3\cos x + 5\ln y$-$17$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 4y^5 \cdot 3x^2 + 3\sin x = 12x^2y^5 + 3\sin x, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 4x^3 \cdot 5y^4 + \frac{5}{y} = 20x^3y^4 + \frac{5}{y}.$$

Пример 25. $z = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + y^4}\right) - \mathrm{arctg} x \cdot e^{7y}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение.

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^4}} \cdot \left(1 + \frac{1 \cdot 2x}{2\sqrt{x^2 + y^4}}\right) - e^{7y} \cdot \frac{1}{1 + x^2},$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x + \sqrt{x^2 + y^4}} \cdot \left(0 + \frac{1 \cdot 4y^3}{2\sqrt{x^2 + y^4}}\right) - \mathrm{arctg} x \cdot e^{7y} \cdot 7.$$

Пример 26. $z = \left(x^3 + 5x^2\right)^{\cos(4y^3)}$. Найти $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$.

Решение. При дифференциации по x данная функция рассматривается как степенная, а при дифференциации по y – как показательная; поэтому

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \cos(4y^3)(x^3 + 5x^2)^{\cos(4y^3)-1} \cdot (3x^2 + 10x),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = (x^3 + 5x^2)^{\cos(4y^3)} \cdot \ln(x^3 + 5x^2) \cdot (-\sin(4y^3)) \cdot 12y^2.$$

8.3. Градиент функции. Производная по направлению

Определение 20. *Градиентом* функции $z = f(M)$ в точке M_0 называется вектор, координатами которого являются частные производные этой функции, вычисленные в точке M_0:

$$\mathrm{grad}\, z\Big|_{M_0} = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\Big|_{M_0}; \frac{\partial z}{\partial y}\Big|_{M_0}\right).$$

Пример 27. Дана функция $z = 4x^3 - 6xy^2 + y^3$. Найти $\mathrm{grad}\, z\Big|_{M_0}$, где $M_0(-1;2)$.

Решение. Сначала находим частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}=12x^2-6y^2$, $\frac{\partial z}{\partial y}=-12xy+3y^2$ и теперь их вычисляем в точке M_0:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0}=12\cdot(-1)^2-6\cdot 2^2=-12,\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0}=-12\cdot(-1)\cdot 2+3\cdot 2^2=36$$

Значит, $\operatorname{grad} z\big|_{M_0}=(-12;\,36)$.

Пусть $z=f(x,y)=f(M)$ – функция, определенная в области D и M_0-произвольная фиксированная точка этой области (рис. 19). Пусть, кроме того, нам задано направление $\bar{l}$.

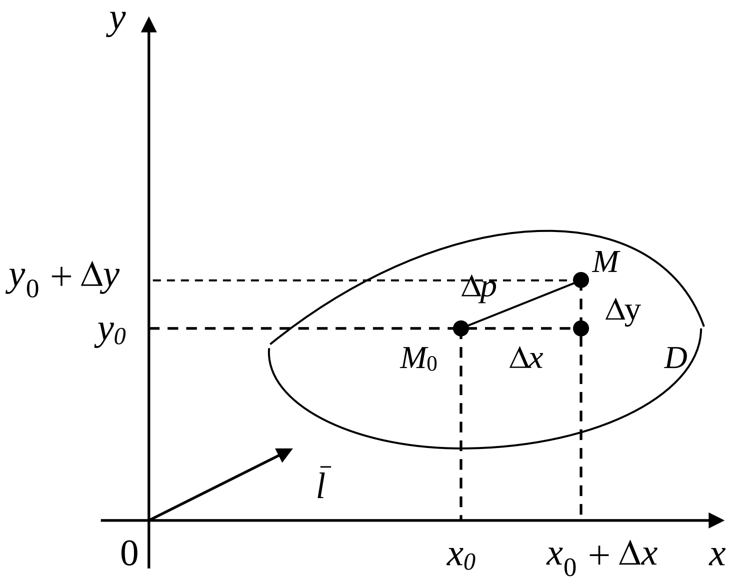

Рис. 19

Дадим возможность точке перемещаться в направлении $\bar{l}$ из положения $M_0(x_0;\,y_0)$ в положение $M(x_0+\Delta x,\,y_0+\Delta y)$, где M – точка области близкая к M_0; расстояние между ними

$$\Delta p=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}.$$

Величины Δx и Δy называются *приращениями аргументов*, а

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)\ -$$

полным приращением функции $z=f(x,y)$ при переходе от точки M_0 к точке M. Разделим Δz на Δp и перейдем к пределу $\Delta p \to 0$. Если указанный предел существует, то он называется *производной функции z по направлению* $\bar{l}$ в точке M_0 и обозначим $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$. Таким образом по определению

$$\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta z}{\Delta p} = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)}{\Delta p}.$$

Производная по направлению выражает скорость изменения функции в этом направлении.

Между градиентом и производной по направлению имеется тесная связь: производная по направлению $\bar{l}$ есть скалярное произведение градиента на единичный вектор заданного направления:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}\right|_{M_0} = \left.\text{grad}\, z\right|_{M_0} \cdot \vec{l}_0\,, \quad \bar{l}_0 = \frac{1}{\|\bar{l}\|}\bar{l}\,.$$

Пример 28. Дана функция $z = 4x^2y^5 + x^3 + 3y^2$ и направление $\bar{l} = 3\vec{i} - 4\vec{j}$.

Найти $\left.\text{grad}\, z\right|_{M_0}$ и $\left.\frac{\partial z}{\partial l}\right|_{M_0}$, $M_0(2;-1)$.

<u>Решение.</u>

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 8xy^5 + 3x^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 20x^2y^4 + 6y.$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{M_0} = 8 \cdot 2 \cdot (-1)^5 + 3 \cdot 2^2 = -4, \quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{M_0} = 20 \cdot 2^2 \cdot (-1)^4 + 6 \cdot (-1) = 74.$$

$$\left.\text{grad}\, z\right|_{M_0} = (-4;\ 74).$$

Найдём единичный вектор заданного направления

$$\|\bar{l}\| = \sqrt{3^2 + (-4^2)} = 5, \quad \vec{l}_0 = \frac{3}{5}\vec{i} - \frac{4}{5}\vec{j}$$

и, воспользовавшись связью производной по направлению с градиентом, получим:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{l}}\right|_{M_0} = -4 \cdot \frac{3}{5} + 74 \cdot \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{308}{5}.$$

Отметим два важнейших свойства градиента.

Первое – градиент показывает направление, в котором скорость изменения функции максимальна, причём норма градиента равна величине этой максимальной скорости. Другими словами, градиент указывает направление наибольшего возрастания функции.

Второе свойство связано с понятием линий уровня.

Определение 21. Линией уровня функции $z = f(x,y)$ называется множество точек плоскости xOy, о которых функция принимает одно и то же значение c.

С линиями уровня приходится встречаться практически во всех инженерных дисциплинах. В геодезии и топографии это горизонтали, в метеорологии – изотермы – линии одинаковых температур и изобары линии равного давления и т.д.

Второе важное свойство градиента состоит в том, что в каждой точке каждой линии уровня градиент функции перпендикулярен к ней (т.е. к её касательной рис. 20).

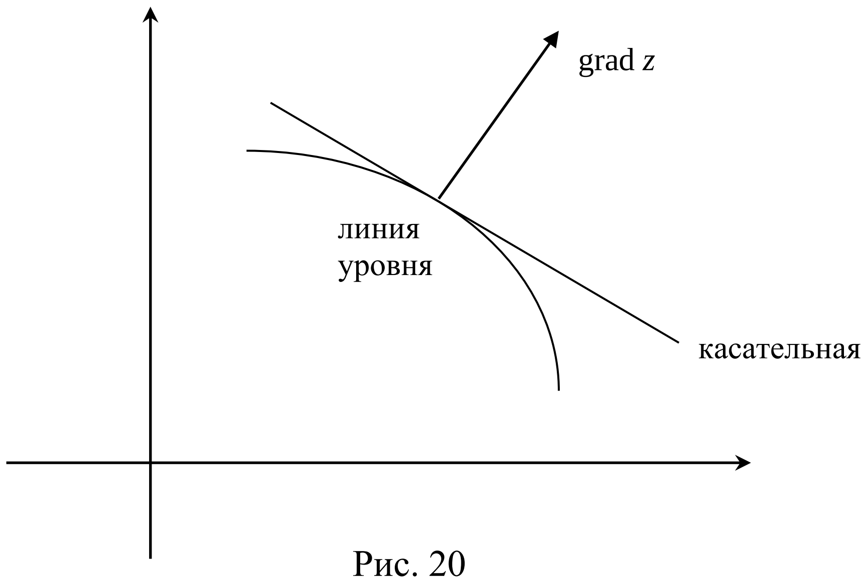

Рис. 20

8.4. Частные производные второго порядка

Предположим, что функция $z=f(x,y)$ имеет в некоторой области D частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ и $\frac{\partial z}{\partial y}$. Эти производные тоже являются функциями переменных x и y. Поэтому вполне естественно говорить об их частных производных. Определяются эти частные производные следующим образом:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)$$ – вторая частная производная по x;

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ – вторая частная производная по } y;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) \text{ – производная по } y \text{ от уже найденной производной по } x;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) \text{ – производная по } x \text{ от уже найденной производной по } y.$$

Две последние производные принято называть смешанными. Определенные выше производные называются производные второго порядка.

Пример 29. Дана функция $z=x^3+2x^2y^2+y^5$. Найти частные производные второго порядка.

Решение. Находим сначала частные производные первого порядка:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=3x^2+4xy^2; \quad \frac{\partial z}{\partial y}=4x^2y+5y^4.$$

Теперь дифференцируем каждую из них и по x и по y:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=\frac{\partial}{\partial x}(3x^2+4xy^2)=6x+4y^2;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=\frac{\partial}{\partial y}\left(4x^2y+5y^4\right)=4x^2+20y^3;$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2+4xy^2\right)=8xy; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}=\frac{\partial}{\partial x}\left(4x^2y+5y^4\right)=8xy.$$

Обратите внимание на то, что смешанные производные оказались равны. Случайно ли это? Оказывается, что нет.

Теорема 20. Если функция $z=f(x,y)$, определенная в области D, имеет вторые частные производные, являющиеся непрерывными функциями, то

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=\frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}.$$

§9. ПРИМЕНЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ПРОИЗВОДНЫХ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЭКОНОМИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Функции находят широкое применение в экономической теории и практике. Наиболее часто в экономике используются следующие функции:

1) функция полезности- зависимость полезности, т.е. результата, эффекта, некоторого действия от уровня (интенсивности) этого действия;
2) производственная функция-зависимость результата производственной деятельности от обусловивших его факторов;
3) функция выпуска- зависимость объема производства от наличия или потребления ресурсов;
4) функция издержек- зависимость издержек производства от объемов выпуска продукции;
5) функции спроса, потребления и предложения- зависимость объема спроса, потребления, предложения на отдельные товары и услуги от различных факторов (цены, дохода и т.п.).

Рассмотрим зависимости спроса q(P) и предложения S(p) от цены на товар p. Чем меньше цена, тем больше спрос. В свою очередь, предложение растет с увеличением цены на товар. Изображая в одной системе координат кривые спроса и предложения (рис. 21), можно установить равновесную цену p_0 (т. е. цену, при которой достигается равенство спроса и предложения) данного товара в процессе формирования цен в условиях конкурентного рынка.

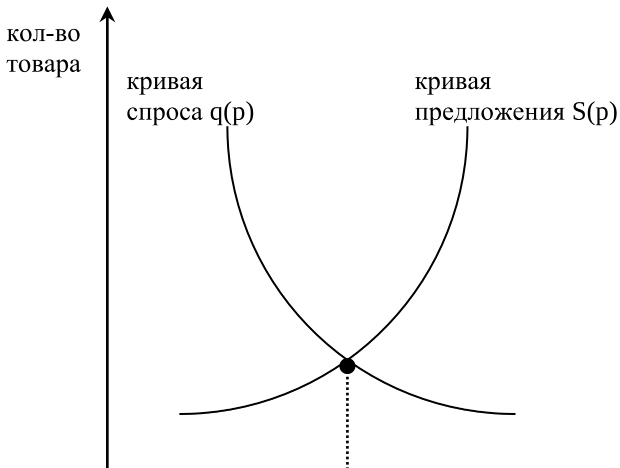

Рис. 21

Пример 30. Даны функции спроса $q=\frac{p+6}{p+1}$ и предложения S=2p+1.5, где p-цена товара. Найти равновесную цену и равновесный объем «спроса-предложения».

Решение Найдем равновесную цену, приравнивая q и S: $\frac{p+6}{p+1}$=2p+1.5$\Rightarrow 2p^2+2.5p-4.5=0 \Rightarrow p_1=-\frac{9}{4}, p_2=1.$

Т. к. цена не может быть отрицательной, то равновесная цена p_0=0.

Вычислим теперь равновесный объем «спроса- предложения», т.е. найдем значение функции спроса (или предложения), соответствующее равновесной цене:

q(1)=S(1)=3.5

Рассматривая функции издержек c(Q) и дохода фирмы R(Q), можно установить зависимость прибыли P(Q)=R(Q)-c(Q) от объема производства Q и выявить уровни объема производства, при которых производство продукции убыточно (когда P(Q)<0), приносит прибыль (когда P(Q)>0), а также найти объем производства, приводящий к максимальной прибыли ($P(Q)\to\max$).

Пример 31. Постоянный издержки F(не зависящие от числа x единиц произведенной продукции) составляют 125 тыс. руб. в месяц, а переменные издержки V от x (пропорциональные x)-700 руб. за каждую единицу продукции. Цена единицы продукции равна 1200 руб. Найти объем продукции x, при котором прибыль составит 100 тыс. руб. в месяц.

Решение Издержки производства x единиц продукции составят c(x)=F+V(x)=125+0.7x. Доход от реализации этой продукции R(x)=1.2x. Тогда прибыль P(x)=R(x)-c(x)=0.5x-125 (тыс. руб.). Прибыль P(x) должна быть равна 100 тыс. руб., т.е. 100=0.5x-125 $\Rightarrow$x=450 ед. Т.о. объем продукции должен составлять 450 ед.

При решении многочисленных экономических задач очень часто используются элементы дифференциального исчисления.

Рассмотрим задачу о производительности труда

Пусть функция $u(t)$ выражает количество произведенной продукции u за время t, и необходимо найти производительность труда в момент времени t_0.

За период времени от t_0 до $t_0+\Delta t$ количество произведенной продукции изменится от значения $u_0=u(t_0)$ до значения $u_0+\Delta u=u(t_0+\Delta t).$ Тогда средняя производительность труда за этот период времени составит $Z_{ср}=\frac{\Delta u}{\Delta t}$.

Очевидно, что производительность труда в момент t_0 можно определить как предельное значение средней производительности за период от t_0 до $t_0+\Delta t$ при $\Delta t\to 0$, т.е.

$$Z=\lim_{\Delta t\to 0} Z_{ср}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta t}=u'$$

Таким образом, производительность труда есть производная объема произведенной продукции по времени.

Пример 32. Объем продукции U(ед.), произведенный бригадой рабочих, может быть описан уравнением

$$U=-\frac{5}{6}t^3+\frac{15}{2}t^2+100t+50 \ \text{(ед.)}, \ 1\le t\le 8,$$

где t-рабочее время в часах. Вычислить производительность труда и скорость ее изменения через час после начала работ и за час до ее окончания.

Решение Производительность труда есть производная объема продукции по времени:

$$Z(t)= u'(t)=-\frac{5}{2}t^2+15t+100 \ \text{(ед./ч}^2\text{)},$$

А скорость ее изменения- производная от производительности труда:

$$Z'(t)=-5t+15 \ \text{(ед./ч)}.$$

В заданные моменты времени $t_1=1$ и $t_2=8-1=7$ соответственно имеем:

$$Z(1)=112.5 \ \text{(ед./ч)}, \qquad Z'(1)=10 \ \text{(ед./ч}^2\text{)};$$

$$Z(7)=82.5 \ \text{(ед./ч)}, \qquad Z'(7)=-20 \ \text{(ед./ч}^2\text{)}.$$

Итак, к концу работы производительность труда существенно снижается; при этом изменения знака $Z'(t)$ с плюса на минус свидетельствуют о том, что увеличение производительности труда в первые часы рабочего дня сменяется ее снижение в последние часы.

Рассмотрим еще одно понятие, иллюстрирующее экономический смысл производной.

Издержки производства С будем рассматривать как функцию объема выпускаемой продукции Q. Пусть ΔQ- прирост продукции, тогда ΔC- приращение издержек производства, а $\frac{\Delta Ñ}{\Delta Q}$- среднее приращение издержек производства на единицу продукции. Производная $C'=\lim\limits_{\Delta Q\to 0}\frac{\Delta Ñ}{\Delta Q}$ выражает предельные издержки производства и характеризует приближенно дополнительные затраты на производство единицы дополнительной продукции.

Пример 33. Зависимость между издержками производства С и объемом продукции Q выражается функцией $Ñ=30Q-0.09Q^3$. Определить средние и предельные издержки при объеме выпускаемой продукции, равном 10 ед.

Решение Функция средних издержек (на единицу продукции) имеет вид:

$$\bar{Ñ}=\frac{Ñ}{Q}=\frac{30Q-0.09Q^3}{Q}=30-0.09Q^2$$

При Q=10 средние издержки равны:

$$\bar{Ñ}=30-0.09\cdot 10^2=21 \ \text{(ден. ед.)}.$$

Функция предельных издержек выражается производной:

$$C'(Q) = 30 - 0.27Q^2$$

При Q=10 предельные издержки составят:

$$C'(10) = 30 - 0.27 \cdot 10^2 = 3 \text{ (ден. ед.).}$$

Таким образом, средние издержки на производство единицы продукции составляют 21 ден. ед., а предельные издержки, т.е. дополнительные затраты на производство дополнительной продукции (при объеме выпускаемой продукции 10 ед.), составляют 3 ден. ед.

Аналогично предельным издержкам могут быть определены предельная выручка, предельный доход, предельный продукт, предельная полезность, предельная производительность и другие предельные величины.

КОНТРОЛЬНАЯ РАБОТА № 2

Задача 1. Найти производные следующих функций:

1) $y = ax^b - 2x^{b-a} + 4\sqrt[3]{x} - 7;$

2) $y = 5\sin ax + 8tg(2x + b) + 1;$

3) $y = (4x^b + 3\sqrt{x}) \cdot \arcsin(1 - ax);$

4) $y = \dfrac{(1+a)x^2 - bx + 9}{e^{(b-a)x} + 7x};$

5) $y = \cos^2(bx - x^3) + \sqrt{ax^4 - 3x + b};$

6) $y = e^{\sin(ax+b)} \cdot \ln^{b+3}\left(x + \dfrac{a}{2}\sqrt{x}\right);$

7) $y = arctg^{a+2}(\cos(3x^{b+1} - 5x^2));$

8) $y = \dfrac{x^4 \ln(2x - a^{\sqrt{x}})}{\sin^3(8x^2 + b)} + \arccos\dfrac{1}{x} \cdot (x^4 + 7)^{b+5}.$

Задача 2. Найти пределы:

1) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{ax^3 + 2x^2 - bx + 4}{(a+b)x^3 + 5x^2 - 1};$

2) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{2x+7} - 3}{x^2 + (b-1)x - b};$

3) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3x^2 + ax + 2}{e^{(b+1)x}};$

4) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{tg^3((a+1)x)}{x \arcsin^2((b+2)x)};$

5) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(\cos(a+b+1)x)}{\ln(\cos(a+b+2)x)};$

6) $\lim\limits_{x\to\infty} \left(5^x + (a+3)x^2\right)^{\frac{1}{x}}.$

Задача 3. Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 9x^2 + 15x + a$ на отрезке $[-1, b+2]$.

<u>Задача 4.</u> Найти частные производные $\frac{\partial z}{\partial x}$ *и* $\frac{\partial z}{\partial y}$ *функции z=f(x;y)*

1) $z = 5x^2 - (a+1)y + \sqrt{(b+2)y^2 - 4x}$;

2) $z = x^3 e^{(a^2+1)x + 6\sqrt{y}}$;

3) $z = \dfrac{\sin\left(1 + \dfrac{x}{y} + ax\right)}{\sqrt{x^2 y} - by}$.

<u>Пояснение</u> Числа a и b выбираются студентом по его зачетной книжке (или студенческому билету):

a – это последняя цифра в “зачетке”,

b – это предпоследняя цифра в “зачетке”.

Желаем Вам успехов!